

Abschätzungen aus der Theorie der Quellencodierung

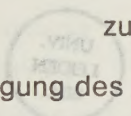
von
Werner Rösner
aus Eschenbach

1977
—

Abschätzungen aus der Theorie der Quellencodierung

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt von
Werner Rösner
aus Eschenbach

Als Dissertation genehmigt von den
Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1977

Vorsitzender der

Promotionskommission:

Professor Dr. E. Schweizer

Erstberichterstatter:

Professor Dr. K. Jacobs

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. H. Rost

Inhaltsverzeichnis

	Seite:
Einleitung	1
Kapitel I: Mittlere Verluste von Quellencodes	4
§ 1 Das Modell	4
§ 2 Der mittlere Verlust und die Rate-Distortion Funktion	9
Kapitel II: D-Schwellenwertverluste von Quellencodes	42
§ 1 Eigenschaften der Abschätzungsparameter	43
§ 2 Die untere Abschätzung	57
§ 3 Die obere Abschätzung	61
§ 4 Vergleich von oberer und unterer Abschätzung	76
§ 5 Spezielle obere Abschätzung für "hohe" Raten	90
Literaturverzeichnis	99
Verzeichnis der wichtigsten Symbole	100



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548420_0007

EINLEITUNG

Die Untersuchungen in dieser Arbeit lassen sich in das folgende allgemeine Modell einer Datenverarbeitung einordnen.

Eine Datenquelle, welche durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß gesteuert wird, liefert zu diskreten Zeitpunkten Daten, die einem Benützer oder Empfänger nur mittels eines statistisch gestörten Verarbeitungssystems zugänglich sind. Seine Entscheidungen oder Handlungen, die er aufgrund der so erhaltenen Daten fällt, bzw. unternimmt, sind wegen der Störungen meist nicht optimal und daher mit gewissen Verlusten verbunden. Den Zusammenhang zwischen solchen Verlusten und den Parametern des Verarbeitungssystems zu studieren ist Aufgabe der Informationstheorie. Man beschränkt sich dabei auf Verarbeitungssysteme, die aus einem Nachrichtenübertragungsteil (Kanal) und einem Quellencodierungsteil bestehen. Ersterer ist in der Informationstheorie schon sehr eingehend behandelt worden, während der zweite Teil erst in jüngerer Zeit Gegenstand von Veröffentlichungen wurde.

Unser Modell einer Datenquelle wird in Kapitel I, § 1 mathematisch definiert. Es unterscheidet sich von den bisherigen Modellen hauptsächlich durch seine All-

gemeinheit. Im Gegensatz zu den meist diskreten stationären Quellen in der Literatur behandeln wir Quellen als Meßräume mit nicht-stationären Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen darauf. Weiterhin definieren wir in Kapitel I zunächst etwas willkürlich eine reelle Funktion $R(\cdot)$ auf $[0, \infty[$, Rate-Distortion Funktion genannt, und wenden die durch eine exakte Analyse dieser Funktion gewonnenen Ergebnisse an, um das zeitasymptotische Verhalten der minimalen Rate von Quellencodes, deren mittlerer Verlust höchstens D (wobei $D \geq 0$) ist, zu beschreiben. Es stellt sich dabei heraus, daß diese Rate zum Zeitpunkt n gleich $\frac{1}{n}R(nD) + O(\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}})$ ist, sich im Wesentlichen also wie die Rate-Distortion Funktion verhält. (Lemma 2.2 und Satz 2.11)

In Kapitel II untersuchen wir das zeitasymptotische Verhalten der optimalen D -Schwellenwertverluste in Abhängigkeit von der Schwelle D und der Quellencoderate R .

Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um untere und obere Abschätzungen für Mittelwerte der Verteilungsschwänze von Minimas einer mit dem Zeitparameter exponentiell ansteigenden Anzahl von Zufallsvariablen, die selbst Summen unabhängiger Zufallsvariablen sind. Für eine feste Anzahl solcher Zufallsvariablen wären die Abschätzungsmethoden schon

bekannt (Chernoffschranken!) - jedoch versagen sie in unserem Fall für die oberen Abschätzungen völlig. Durch geschicktes, das heißt von der Strukturanalyse der unteren Schranke motiviertes, Zerfällen des Datenmeßraumes lassen sich für die Teilräume und schließlich durch "Aneinandersetzen" auch für den gesamten Raum obere Abschätzungen durchführen, derart daß der Abstand der Exponenten der oberen und unteren Abschätzung für einen gewissen Raten-Schwellenwertbereich mit dem Zeitparameter in der Levimetrik gegen Null strebt.

Im letzten Paragraphen des Kapitel II wird noch eine Besonderheit der D-Schwellenwertverluste behandelt - es wird gezeigt, daß für Raten, die über einer gewissen kritischen Rate liegen, die D-Schwellenwertverluste sogar doppelt-exponentiell abfallen.

Kapitel I: Mittlere Verluste von Quellencodes

§ 1 Das Modell

Um den Notationsaufwand zu verringern und unser Modell von nicht unbedingt notwendigen maßtheoretischen Problemen frei zu halten, definieren wir unser mathematisches Modell auf eine andere Weise als üblich.

1.1 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{B})$ ein Meßraum, p ein Wahrscheinlichkeitsmaß hierauf, und $\mathcal{L}$ eine Menge meßbarer Funktionen von Ω nach $[0, \infty[$, so wird das 4-Tupel $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})$ eine Quelle genannt. Die Menge $\mathcal{L}$ bzw. der Meßraum $(\Omega, \mathcal{B})$ heißen Menge der Verlustfunktionen, bzw. Datenmeßraum.

1.2 Definition

Eine Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})$ heißt normiert, falls :

$\bigwedge_{l \in \mathcal{L}} l(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei $\bigwedge$ das verbandstheoretische Infimum für Funktionen bedeute.

1.3 Definition

Jede endliche Teilmenge L von $\mathcal{L}$ heißt Quellencode der Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})$, und es bezeichnen:

- (1) $\int dp \bigwedge_{l \in L} 1$ den mittleren Verlust,
- (2) $p\{\omega: \bigwedge_{l \in L} l(\omega) > D\}$ den D-Schwellenwertverlust des Quellencodes L.

1.4 Definition

Jede Folge von Quellen der Form $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})_{v \in \mathbb{N}}$ heißt gedächtnisfreie Quelle (mit diskretem Zeitparameter). Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das Quadrupel

$(\Omega_{(n)}, \mathcal{B}_{(n)}, p_{(n)}, \mathcal{L}_{(n)})$ zugeordnet, mit:

$$\Omega_{(n)} := \bigtimes_{v=1}^n \Omega_v, \text{ wobei } \Omega_v := \Omega \text{ für alle } 1 \leq v \leq n$$

$$\mathcal{B}_{(n)} := \bigotimes_{v=1}^n \mathcal{B}_v, \text{ wobei } \mathcal{B}_v := \mathcal{B} \text{ für alle } 1 \leq v \leq n$$

$$p_{(n)} := \bigotimes_{v=1}^n p_v, \text{ und}$$

$$\mathcal{L}_{(n)} := \bigtimes_{v=1}^n \mathcal{L}_v, \text{ wobei } \mathcal{L}_v := \mathcal{L} \text{ für alle } 1 \leq v \leq n$$

und jedes $l_{(n)} := (l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{L}_{(n)}$ durch

$$\omega_{(n)} := (\omega_1, \dots, \omega_n) \longrightarrow l_{(n)}(\omega_{(n)}) := \sum_{v=1}^n l_v(\omega_v)$$

eine meßbare Funktion auf $\Omega_{(n)}$ ist.

und wird gedächtnisfreie Quelle zum Zeitpunkt n genannt. Eine gedächtnisfreie Quelle heißt stationär, falls die Folge $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})_{v \in \mathbb{N}}$ konstant ist.

Interpretationen

Die Menge $\mathcal{L}$ kann man als Menge der Darstellungssymbole für Ω betrachten, wobei durch $g(\omega, l) := l(\omega)$

der Verlust angezeigt wird, der entsteht, falls man das Symbol ω als Symbol 1 darstellt.

Eine endliche Teilmenge $L := \{1^1, \dots, 1^N\}$ von $\mathcal{L}$ heißt deswegen Quellencode, weil sie die Quellensymbole Ω auf folgende Weise verschlüsselt. Sei $(E_i)_{1 \leq i \leq N}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in meßbare Teilmengen, derart, daß $E_i = \{\omega: 1^i(\omega) \leq \bigwedge_{j \neq i} 1^j(\omega)\}$ für alle $1 \leq i \leq N$; ordnet man nun jedem $\omega \in \Omega$ genau dann 1^i zu, falls ω aus E_i ist, so drückt (1) von Definition 1.3 den erwarteten Verlust bei dieser Darstellung von Ω durch L aus, und (2) gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß bei dieser Darstellung ein Verlust größer als D auftritt.

Bemerkung

Üblicherweise arbeitete man bisher mit Modellen, bei denen die Menge der Verlustfunktionen durch eine einzige Verlustfunktion $\mathfrak{f}$ auf einem kartesischen Produkt zweier Mengen Ω und Ω' gegeben waren. Mit Ω war dabei auch Ω' mit einem Borelkörper versehen. Solange man sich aber nur mit endlichen Teilmengen (Quellencodes) von Ω' beschäftigt, benötigt man keine speziellen Annahmen über einen Borelkörper auf Ω' . Durch Restklassenbildung bezüglich der Relation $\sim$ auf Ω' , definiert, durch $\omega'_1 \sim \omega'_2 \Leftrightarrow \mathfrak{f}(\omega, \omega'_1) = \mathfrak{f}(\omega, \omega'_2)$ für alle $\omega \in \Omega$, geht dann unser Modell aus dem üblichen hervor, ohne

daß Analysen der Verluste (1) und (2) aus Definition 1.3 an Allgemeinheit verlieren.

Die Bedeutung der normierten Quellen

1. Aus einer allgemeinen Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ kann stets eine normierte gewonnen werden, indem aus $\mathcal{X}$ die Menge $\mathcal{X}' := \{1 - \bigwedge_{l \in \mathcal{X}} \bar{l} : l \in \mathcal{X}\}$ geformt wird ($\bigwedge_{l \in \mathcal{X}}$ sei obdA. als meßbar angenommen, da man notfalls die $l \in \mathcal{X}$ auf p -Nullmengen so abändern kann, daß diese geänderten Funktionen und deren Infimum meßbar sind).

2. Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ eine allgemeine Quelle und $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X}')$ die gemäß 1. zugeordnete normierte Quelle, so lassen sich mittels $l \in \mathcal{X} \rightarrow \bar{l} := \{1 - \bigwedge_{l \in \mathcal{X}} \bar{l} : l \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{X}'$ die Quellencodes der beiden Quellen eineindeutig aufeinander abbilden, und es gilt für die mittleren Verluste: $\int dp \bigwedge_{l \in \mathcal{L}} l = \int dp \bigwedge_{l \in \mathcal{L}} \bar{l} + \int dp \bigwedge_{l \in \mathcal{X}} \bar{l}$; das heißt: bis auf eine additive Konstante haben die einander zugeordneten Quellencodes die gleichen mittleren Verluste.

3. Mit den Bezeichnungen von 2. gilt für die Funktion $\omega \in \Omega \rightarrow f_D(\omega) := D + \bigwedge_{l \in \mathcal{X}} l(\omega)$ und für alle $l \in \mathcal{X}$: $p\{\omega: \bigwedge_{l \in \mathcal{L}} l(\omega) > f_D(\omega)\} = p\{\omega: \bigwedge_{l \in \mathcal{L}} \bar{l}(\omega) > D\}$. Dies bedeutet, daß man durch Analysen von D -Schwellenwertverlusten normierter Quellen gleichzeitig für allgemeine Quellen Schellenwertverluste analysiert, bei denen die

Senwelle aus einer Funktion vom Typ f_D besteht. Anschaulich gesprochen bedeutet ein Abschneiden der Funktionen $\bigwedge_{l \in L} l$ durch f_D , daß man für jedes $\omega \in \Omega$ nur dann den Codierverlust als zumindest gleich D betrachtet, falls er um mindestens D größer als der Sockel $\bigwedge_{l \in L} l(\omega)$ ist. Dieser Sockel könnte ohnehin durch keinen Quellencode unterschritten werden.

Allgemeine Übereinkunft:

Von nun ab wird jede Quelle als normiert vorausgesetzt, ohne daß wir dies ausdrücklich erwähnen werden. Mittels der obigen Absätze 1., 2. und 3. lassen sich dann die Ergebnisse dieser Arbeit auch auf den Fall einer allgemeinen Quelle übertragen.

§ 2 Der mittlere Verlust und die Rate-Distortion Funktion

Wir werden uns in diesem Paragraphen mit dem folgenden Problem beschäftigen.

Es sei eine gedächtnisfreie Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben, und für jedes $n \in \mathbb{N}$, $D \geq 0$ sei:

$$\mathcal{C}_{(n)}^{(D)} := \left\{ I_{(n)} = \mathcal{X}_{(n)} : \int d p_{(n)} \bigwedge_{I_{(n)} \in I_{(n)}} I_{(n)} \leq nD, |I_{(n)}| < \infty \right\}$$

gibt es nun ein $D_0 \geq 0$ und eine mathematisch verhältnismäßig einfache Funktion, die bis auf additive Terme, welche mit wachsendem n gegen Null streben, für

$$D \geq D_0 \longrightarrow \inf \left\{ \frac{\ln(|I_{(n)}|)}{n} : I_{(n)} \in \mathcal{C}_{(n)}^{(D)} \right\}$$

eine untere und obere Abschätzung darstellt?

Bemerkung

Für den Fall stationärer gedächtnisfreier Quellen mit diskretem Datenmeßraum wurde dieses Problem in [1] und [3] bereits behandelt. Neben der größeren Allgemeinheit erbringen unsere Untersuchungen eine exaktere Analyse der Rate-Distortion Funktion, eine neue Herleitung der unteren Abschätzung, und eine genaue Angabe des Störterms der oberen Abschätzung.

2.1 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ eine Quelle, $\Delta(\mathcal{X})$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße mit endlichem Träger auf $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$, und sei für alle $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Delta(\mathcal{X})$, $\omega \in \Omega$:

$n_{\lambda}^t(\omega) := \left(\sum_{l \in \mathcal{X}} \lambda(l) e^{-t l(\omega)} \right)^{-1}$, so wird die Funktion:

$R_p: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty]$

$$D \rightarrow \inf_{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}, |\mathcal{X}| < \infty} R_p(D, \mathcal{X}) := \sup_{0 \leq t} \inf_{\lambda \in \Delta(\mathcal{X})} \int dp \ln(n_{\lambda}^t) - tD$$

Rate-Distortion Funktion genannt.

Bemerkung

Satz 2.15 wird zeigen, daß die obige Definition der Rate-Distortion Funktion mit der sonst üblichen äquivalent ist. Das folgende Lemma zeigt jedoch sofort die Nützlichkeit unserer Definition.

2.2 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p_y, \mathcal{X})_{y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, so gilt für alle $D \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\inf \left\{ \frac{\ln(|I_{(n)}|)}{n} : I_{(n)} \in \mathcal{C}_{(n)}(D) \right\} \geq \frac{1}{n} R_{p_{(n)}}(nD)$$

Beweis

Falls $\mathcal{C}_{(n)}(D) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen; sei also $I_{(n)} \in \mathcal{C}_{(n)}(D)$, so folgt für jedes $t \geq 0$:

$$\ln(|I_{(n)}|) \geq \ln(|I_{(n)}|) + t \left(\int dp_{(n)} \bigwedge_{l_{(r)} \in I_{(n)}} l_{(r)} - nD \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln |L_{(n)}| - \int dP_{(n)} \bigvee_{l_{(n)} \in L_{(n)}} e^{-t l_{(n)}} - t n D \quad \triangleright \\
 &\int dP_{(n)} \ln \left(\sum_{l_{(n)} \in L_{(n)}} \frac{1}{|L_{(n)}|} \cdot e^{-t l_{(n)}} \right)^{-1} \quad (\text{Abschätzung des Supr.} \\
 &\quad \text{durch die Summe}) \\
 &= \int dP_{(n)} \ln(h_{\bar{\lambda}}^t) \quad \text{wobei } \bar{\lambda} \text{ definiert ist durch:} \\
 &\quad \bar{\lambda}(l_{(n)}) := \begin{cases} \frac{1}{|L_{(n)}|} & , \text{ falls } l_{(n)} \in L_{(n)} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aus Definition 2.1 folgt dann die Behauptung.

Um zeigen zu können, daß die Rate-Distortion Funktion auch für die obere Abschätzung eine bedeutende Rolle spielt, ist zunächst eine genaue Analyse dieser Funktion notwendig.

2.3 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ eine Quelle, $\mathcal{X} = \mathcal{X}$ endlich, und $D \geq 0$, so existiert ein $\bar{\lambda} \in \Lambda(\mathcal{X})$ mit:

$$R_p(D, \mathcal{X}) = \sup_{0 \leq t} \int dP \ln(h_{\bar{\lambda}}^t) - tD$$

Beweis

(i) $\Lambda(\mathcal{X})$ kann man als Teilmenge des $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$ auffassen und ist somit bezüglich der von der Topologie auf $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$ induzierten Topologie kompakt.

(ii) Aufgrund der Definition von $h_{\bar{\lambda}}^t$ sieht man, daß $\lambda \rightarrow \int dP \ln(h_{\lambda}^t)$ für jedes $t \geq 0$ eine konvexe

Funktion von $\Lambda(\bar{\mathcal{L}})$ nach $[0, \infty]$ ist. Diese Funktion ist auch nach unten halbstetig bezüglich der unter (i) erwähnten Topologie auf $\Lambda(\bar{\mathcal{L}})$:

Denn sei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\Lambda(\bar{\mathcal{L}})$, die gegen ein $\lambda_0 \in \Lambda(\bar{\mathcal{L}})$ konvergiert, derart daß für ein gewisses $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int dp \ln(h_{\lambda_n}^t) \leq a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

so folgt mit $\varepsilon_n := \sum_{l \in \bar{\mathcal{L}}} |\lambda_n(l) - \lambda_0(l)|$ und Definition 2.1

$$[h_{\lambda_n}^t(\omega)]^{-1} \leq [h_{\lambda_0}^t(\omega)]^{-1} + \varepsilon_n \quad \text{für alle } \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$$

und weiter mit (1):

$$\int dp \ln([h_{\lambda_0}^t]^{-1} + \varepsilon_n)^{-1} \leq a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und aus dem Lemma von Fatou folgt dann wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$

$$\int dp 1_{\{h_{\lambda_0}^t > 1\}} \cdot \ln(h_{\lambda_0}^t) \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dp 1_{\{h_{\lambda_0}^t \geq \frac{1}{1-\varepsilon_n}\}} \cdot \ln([h_{\lambda_0}^t]^{-1} + \varepsilon_n)^{-1} \leq a$$

$$\text{das heißt, es gilt auch} \quad \int dp \ln(h_{\lambda_0}^t) \leq a \quad (2)$$

und somit folgt aus (1) und (2), daß für beliebiges

$$a \in \mathbb{R} \quad \text{die} \{ \lambda \in \Lambda(\bar{\mathcal{L}}) : \int dp \ln(h_{\lambda}^t) \leq a \} \quad \text{abgeschlossen ist.}$$

(iii) Aufgrund der Definition von h_{λ}^t sieht man, daß $t \rightarrow \int dp \ln(h_{\lambda}^t)$ für jedes $\lambda \in \Lambda(\bar{\mathcal{L}})$ eine konkave Funktion von $[0, \infty[$ nach $[0, \infty]$ ist.

(iv) Mit (i), (ii) und (iii) sind die Voraussetzungen des

von Neumannschen Minimaxsatzes in der Version von H. König [5] erfüllt, und es folgt hieraus unsere Behauptung.

2.4 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ eine Quelle, so bezeichne

$$D_p(\min) := \inf_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}, |\mathcal{Z}| < \infty} D_p(\min, \mathcal{Z}) := \int dp \bigwedge_{1 \in \mathcal{Z}} 1$$

$$D_p(\max) := \inf_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}, |\mathcal{Z}| < \infty} D_p(\max, \mathcal{Z}) := \min_{1 \in \mathcal{Z}} \left(\int dp \, 1 \right)$$

2.5 Lemma

Mit den Voraussetzungen von Definition 2.4 gilt für alle endlichen $\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}$ und alle $D \geq 0$

$$(i) \quad D < D_p(\min, \mathcal{Z}) \implies R_p(D, \mathcal{Z}) = \infty$$

$$(ii) \quad D \gg D_p(\max, \mathcal{Z}) \implies R_p(D, \mathcal{Z}) = 0$$

$$(iii) \quad L > D_p(\min, \mathcal{Z}) \implies R_p(D, \mathcal{Z}) \leq \ln |\mathcal{Z}|$$

$$(iv) \quad L > D_p(\min, \mathcal{Z}) \implies R_p(D, \mathcal{Z}) = \max_{t \in [0, T]} \inf_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{Z})} \left(\int dp \ln(h_{\lambda}^t) - tD \right)$$

mit $T := \frac{\ln |\mathcal{Z}|}{D - D_p(\min, \mathcal{Z})}$

Beweis

$$(i) \quad \sup_{t \geq 0} \inf_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{Z})} \left(\int dp \ln(h_{\lambda}^t) - tD \right) >$$

$$\sup_{t \geq 0} \int dp \ln \left(\bigvee_{l \in \mathcal{L}} e^{-tl} \right)^{-1} - tD =$$

$$\sup_{t \geq 0} \int dp \bigwedge_{l \in \mathcal{L}} tl - tD = \infty$$

(ii) Sei $l_0 \in \mathcal{L}$ derart, daß $\int dp l_0 = D_p(\max, \mathcal{L})$,
so folgt für $\lambda_0 := \varepsilon_{l_0}$ (Einheitsmasse auf l_0)

$$0 \leq R_p(D, \mathcal{L}) \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int dp \ln(h_{\lambda_0}^t) - tD \right) = 0$$

(iii) und (iv) Es gilt für alle $t \geq 0$

$$\inf_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})} \left(\int dp \ln(h_{\lambda}^t) - tD \right) \leq \int dp \ln \left(\frac{1}{|\mathcal{L}|} \sum_{l \in \mathcal{L}} e^{-tl} \right)^{-1} - tD$$

$$\leq \ln |\mathcal{L}| + \int dp \ln \left(\bigvee_{l \in \mathcal{L}} e^{-tl} \right)^{-1} - tD \leq$$

$$\ln |\mathcal{L}| + t(D_p(\min, \mathcal{L}) - D)$$

woraus sofort unter Beachtung der Definition der Rate-Distortion Funktion die Behauptungen folgen.

Das folgende Lemma gibt eine Charakterisierung der minimalen λ -Parameter bei der Berechnung der Rate-Distortion Funktion.

2.6 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})$ eine Quelle, $\mathcal{L} = \mathcal{X}$ endlich, $\bar{\lambda} \in \Lambda(\mathcal{L})$,
 $t \geq 0$, $\int dp \ln(h_{\bar{\lambda}}^t) < \infty$, so sind äquivalent:

(i) $\int dp \ln(h_{\bar{\lambda}}^t) \leq \int dp \ln(h_{\lambda}^t)$ für alle $\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})$

(ii) $\int dp e^{-tl} \cdot h_{\bar{\lambda}}^t \leq 1$ für alle $l \in \mathcal{L}$

und zusätzlich gilt für $\tilde{\lambda}$ und λ welche die Voraussetzungen und (i) erfüllen :

$$h_{\tilde{\lambda}}^t(\omega) = h_{\lambda}^t(\omega) \quad \text{für p-fast alle } \omega \in \Omega$$

Beweis

(i) $\implies$ (ii)

Für jedes $l_0 \in \mathcal{L}$ sei ϵ_{l_0} die Einheitsmasse in l_0 und für jedes $\alpha \in [0, 1[$ sei

$$f_{l_0}(\alpha) := (1-\alpha)^{-1} \left(\int dp \ln(h_{\tilde{\lambda}}^t) - \int dp \ln(h_{\alpha\tilde{\lambda} + (1-\alpha)\epsilon_{l_0}}^t) \right),$$

so gilt wegen (i):

$$f_{l_0}(\alpha) \leq 0 \quad \text{für alle } l_0 \in \mathcal{L}, \alpha \in [0, 1[\quad (1)$$

und aufgrund der Definition 2.1 und der Konvexität des negativen Logarithmus, daß für alle $\omega \in \Omega, l_0 \in \mathcal{L}$

$$\beta \rightarrow \frac{\ln(h_{\tilde{\lambda} + \beta \epsilon_{l_0}}^t(\omega)) - \ln(h_{\tilde{\lambda}}^t(\omega))}{\beta} =: g_{l_0}(\beta, \omega)$$

eine monoton steigende Funktion auf $[0, 1]$ ist, deren Grenzwert für β gegen Null gleich $-h_{\tilde{\lambda}}^t(\omega)e^{-tl_0(\omega)}$ ist.

Aus dem Satz von B. Levi in der Maßtheorie folgt dann

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int p(d\omega) (-g_{l_0}(\beta, \omega)) = \int p(d\omega) h_{\tilde{\lambda}}^t(\omega) e^{-tl_0(\omega)} \quad (2)$$

und somit wegen (1) und (2):

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\alpha \rightarrow 1} f_{l_0}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left(\frac{\ln \alpha}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int p(d\omega) g_{l_0}(\frac{1-\alpha}{\alpha}, \omega) \right) \\ &= -1 + \int p(d\omega) h_{\tilde{\lambda}}^t(\omega) e^{-tl_0(\omega)} \quad \text{für alle } l_0 \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

(ii) $\implies$ (i)

Für alle $\lambda \in \Lambda(\mathcal{L})$ gilt wegen (ii) :

$0 > \ln \int_{\mathcal{L}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-t l} h_{\lambda}^t > \int_{\mathcal{L}} \ln \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-t l} \right) h_{\lambda}^t$
 $= \text{dp} \ln(h_{\lambda}^t) - \text{dp} \ln(h_{\lambda}^t),$ wobei für die zweite
 Ungleichung die Jensen-Ungleichung benutzt wurde.

Die letzte Behauptung folgt sofort aus der folgenden Ungleichungskette;

$$\inf_{\lambda \in \Delta(\mathcal{L})} \int_{\mathcal{L}} \text{dp} \ln(h_{\lambda}^t) \leq \int_{\mathcal{L}} \text{dp} \ln \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{2} \bar{\lambda}(l) + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}(l) \right) e^{-t l} \right)^{-1} \\
 \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \text{dp} \ln \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \bar{\lambda}(l) e^{-t l} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \text{dp} \ln \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{\lambda}(l) e^{-t l} \right)^{-1}$$

(Jensen-Ungleichung für die konvexe Funktion "-ln")
 Denn wegen der Voraussetzung (i) muß in der Ungleichungskette überall die Gleichheit stehen, was wegen der strikten Konvexität von "-ln" die Behauptung ergibt.

Für den t-Parameter erhält man eine ähnliche Charakterisierung des optimalen t-Parameters.

2.7 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})$ eine Quelle, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$ endlich, $\lambda \in \Delta(\mathcal{L})$, $\bar{t} > 0$, und $\int_{\mathcal{L}} \text{dp} \ln(h_{\lambda}^{\bar{t}}) < \infty$, so sind äquivalent:

(i) $\int_{\mathcal{L}} \text{dp} \ln(h_{\lambda}^{\bar{t}}) - \bar{t} D > \int_{\mathcal{L}} \text{dp} \ln(h_{\lambda}^t) - t D$ für alle $t > 0$
 und

(ii) $\int_{\mathcal{L}} h^{\bar{t}} \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-\bar{t} l} \right) = D$

Beweis

(i) $\implies$ (ii)

Sei $\omega \in \Omega$, so folgt aus der Konkavität der Funktion

$t \mapsto \ln(h_{\lambda}^t(\omega))$ und aus Definition 2.1, daß

$$\begin{aligned} \varepsilon \mapsto \Delta_{\omega}^+(\varepsilon) &:= \frac{\ln(h_{\lambda}^{\bar{t}+\varepsilon}(\omega)) - \ln(h_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega))}{\varepsilon} && \text{eine nichtnegative,} \\ &&& \text{antitone Funktion und} \\ \varepsilon \mapsto \Delta_{\omega}^-(\varepsilon) &:= \frac{\ln(h_{\lambda}^{\bar{t}-\varepsilon}(\omega)) - \ln(h_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega))}{-\varepsilon} && \text{eine nichtnegative,} \\ &&& \text{isotone Funktion ist.} \end{aligned}$$

Weiterhin sieht man leicht, daß die Limiten für $\varepsilon \rightarrow 0$ obiger Funktionen existieren und beide gleich

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-\bar{t}l(\omega)} h_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega) l(\omega) \quad \text{sind.}$$

Wegen der Konkavität von $t \mapsto \int dp \ln(h_{\lambda}^t)$ und den Voraussetzungen $\bar{t} > 0$, $\int dp \ln(h_{\lambda}^{\bar{t}}) < \infty$, sind für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ sowohl $\omega \mapsto \Delta_{\omega}^+(\varepsilon)$ als auch $\omega \mapsto \Delta_{\omega}^-(\varepsilon)$ integrierbar und wegen der obigen Monotonieeigenschaften folgt aus dem Satz von Lebesgue der Integrationstheorie, daß

$t \mapsto \int dp \ln(h_{\lambda}^t)$ in $\bar{t}$ differenzierbar ist, und dort die Ableitung gleich

$$\int dp \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-\bar{t}l} h_{\lambda}^{\bar{t}} l \right) \quad \text{ist.}$$

Da nun (i) besagt, daß in $\bar{t}$ ein globales Maximum von $t \mapsto \int dp \ln(h_{\lambda}^t) - tD$ vorliegt, und da $\bar{t} > 0$ war, muß die Ableitung Null sein, also (ii) gelten.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Mittels der Jensen-Ungleichung für die konkave Funktion

$x \in \mathbb{R} \rightarrow \ln(x)$ sieht man, daß für alle $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-\bar{t} l(\omega)} \cdot h_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega) \cdot \ln(e^{(\bar{t}-t)l(\omega)} (n_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega))^{-1} h_{\lambda}^t(\omega)) \leq 0$$

(man beachte wiederum: $\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-\bar{t} l(\omega)} \cdot h_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega) = 1$)

und somit:

$$\begin{aligned} \ln(h_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega)) - \bar{t} \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-\bar{t} l(\omega)} \cdot h_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega) \cdot l(\omega) \right) &\geq \\ \ln(h_{\lambda}^t(\omega)) - t \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda(l) e^{-\bar{t} l(\omega)} \cdot h_{\lambda}^{\bar{t}}(\omega) \cdot l(\omega) \right) &\end{aligned}$$

Durch Integration der letzten Ungleichung mit dp folgt dann die Behauptung.

2.8 Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})$ eine Quelle, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ endlich, und

$D \in]D_p(\min, \mathcal{L}), D_p(\max, \mathcal{L})[$, so ist für alle

$(\bar{t}, \bar{\lambda}) \in]0, \infty[\times \Delta(\mathcal{L})$ mit $\int dp \ln(h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}}) < \infty$ äquivalent

$$(i) \quad \int dp \ln(h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}}) - \bar{t} D \geq R_p(D, \mathcal{L}) \geq \int dp \ln(h_{\bar{\lambda}}^t) - t D$$

für alle $t \geq 0$, $\lambda \in \Delta(\mathcal{L})$

$$(ii) \quad \int dp \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \bar{\lambda}(l) e^{-\bar{t} l} \right) h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}} = D \quad \text{und}$$

$$\int dp h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}} e^{-\bar{t} l} \leq 1 \quad \text{für alle } l \in \mathcal{L}$$

Weiterhin gibt es stets ein Tupel (t_D, λ_D) , das (i) und die Voraussetzungen erfüllt; dabei ist t_D eindeutig.

Beweis

Die Äquivalenzaussage folgt aus Lemma 2.6 und 2.7; gemäß Lemma 2.3 existiert ein $\lambda_D \in \Delta(\mathcal{X})$, derart, daß:

$$R_p(D, \mathcal{X}) \geq \int d p \ln(h_{\lambda_D}^t) - tD \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad (1)$$

Sei $\lambda \in \Delta(\mathcal{X}) := \{ \lambda \in \Delta(\mathcal{X}) : \exists t > 0 : \int d p \ln(h_{\lambda}^t) < \infty \}$, so folgt mit dem Satz von Lebesgue $\lim_{t \rightarrow 0} \int d p \ln(h_{\lambda}^t) = 0 = \int d p \ln(h_{\lambda}^0)$, da $t \rightarrow 0 \rightarrow h_{\lambda}^t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ isoton ist. Mithin ist die konkave Funktion $t \rightarrow \int d p \ln(h_{\lambda}^t)$ stetig, und $t \rightarrow 0 \rightarrow \inf_{\lambda \in \Delta(\mathcal{X})} \int d p \ln(h_{\lambda}^t) - tD = \inf_{\lambda \in \Delta(\mathcal{X})} \int d p \ln(h_{\lambda}^t) - tD$ nach oben halbstetig, weswegen mit Lemma 2.5 (iii) und (iv) folgt, daß letztere Funktion ihr Supremum in einem $t_D \in [0, (\ln(|\mathcal{X}|))(D - D_p(\min, \mathcal{X}))^{-1}]$ annimmt.

Falls $t_D > 0$, so sind für das Tupel (t_D, λ_D) die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und es gilt mit der Definition von t_D und $R_p(D, \mathcal{X})$:

$$R_p(D, \mathcal{X}) \leq \int d p \ln(h_{\lambda_D}^{t_D}) - t_D D \quad \text{für alle } \lambda \in \Delta(\mathcal{X}) \quad (2)$$

woraus mit (1) die Gültigkeit von (i) folgt.

Falls aber $t_D = 0$, so würde $R_p(D, \mathcal{X}) = 0$ folgen, was jedoch unter Beachtung von (1) im Widerspruch zu folgender für alle $t \geq 0$ geltender Ungleichung steht: $\int d p \ln(h_{\lambda_D}^t) - tD \geq \int d p (\sum_{l \in \mathcal{X}} \lambda_l(1) e^{-t l} h_{\lambda_D}^t \ln(e^{t l})) - tD$ (3) (Jensen-Ungleichung für die konkave Funktion $x \rightarrow \ln(x)$, und Definition von $h_{\lambda_D}^t$)

Denn mit Monotonieargumenten folgt leicht, daß:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda_D(l) e^{-t l} \right) h_{\lambda_D}^t = \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda_D(l) \right) 1 \gg \geq D_p(\max, \mathcal{L}) \quad \text{ist,}$$

und somit ein t existiert mit:

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda_D(l) e^{-t l} \right) h_{\lambda_D}^t \gg (D_p(\max, \mathcal{L}) + D) 2^{-1}$$

Aus (1) und (3) würde dann folgen:

$$0 = R_p(D, \mathcal{L}) \gg \int_{\mathcal{D}} \ln(h_{\lambda_D}^t) - tD \gg t \frac{1}{2} (D_p(\max, \mathcal{L}) + D) - tD = t \frac{1}{2} (D_p(\max, \mathcal{L}) - D) > 0$$

das heißt t_D kann nicht gleich Null sein.

Angenommen es gibt zwei Tupel (t_j, λ_j) $i=1,2$, die (i) und die Voraussetzungen erfüllen und sei $\tilde{\lambda} \in \Delta(\mathcal{L})$ derart, daß $\tilde{\lambda}$ die Funktion $\lambda \longrightarrow \int_{\mathcal{D}} \ln(h_{\lambda}^t)$ mit $\tilde{t} := \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ minimisiert. (Die Existenz eines solchen $\tilde{\lambda}$ folgt aus dem Beweis von Lemma 2.3)

Aus (i) erhält man dann:

$$\begin{aligned} R_p(D, \mathcal{L}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \ln(h_{\lambda_1}^{t_1}) - \frac{1}{2} t_1 D + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \ln(h_{\lambda_2}^{t_2}) - \frac{1}{2} t_2 D \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \ln \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{\lambda}(l) e^{-t_j l} \right)^{-1} - \tilde{t} D \leq \\ &\int_{\mathcal{D}} \ln \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{\lambda}(l) e^{-\tilde{t} l} \right)^{-1} - \tilde{t} D \quad (\text{Hölder-Ungleichung}) \\ &\leq R_p(D, \tilde{\mathcal{L}}) \end{aligned}$$

In der Ungleichungskette muß also überall die Gleichheit stehen, woraus folgt:

$$R_p(D, \mathcal{Z}) = \int dp \ln(h_{\tilde{\lambda}}^{t_j}) - t_j D \quad j=1,2 \quad (4)$$

Für die Tupel $(t_j, \tilde{\lambda})$ $j=1,2$ kann man wiederum die obige Ungleichungskette herleiten. Es muß dann ebenfalls überall die Gleichheit stehen, was aufgrund der Hölder-Ungleichung die Existenz einer reellen meßbaren Funktion $\omega \in \Omega \rightarrow c(\omega)$ zur Folge hat, für die $e^{-t_1 l(\omega)} = c(\omega) e^{-t_2 l(\omega)}$ für alle $l \in \mathcal{Z}$ mit $\tilde{\lambda}(l) > 0$ p-fast überall auf Ω gilt.

Hieraus folgt dann mit Berücksichtigung von (4):

$$1. \quad \sum_{l \in \mathcal{Z}} \tilde{\lambda}(l) e^{-t_1 l(\omega)} = \left(\sum_{l \in \mathcal{Z}} \tilde{\lambda}(l) e^{-t_2 l(\omega)} \right) c(\omega) \quad \text{p-f.ü.} \quad (5)$$

$$2. \quad \int dp \ln(c) = \int dp \ln(h_{\tilde{\lambda}}^{t_2}) - \int dp \ln(h_{\tilde{\lambda}}^{t_1}) = (t_2 - t_1) D$$

Sei nun l_0 ein Element des Trägers von $\tilde{\lambda}$, so folgt:

$$1. \quad c(\omega) = e^{(t_2 - t_1) l_0(\omega)} \quad \text{p-f.ü.}$$

$$2. \quad \int dp \ln(c) = (t_2 - t_1) \int dp l_0 \quad (6)$$

Aus (5) und (6) und der Voraussetzung $D < D_p(\max, \mathcal{Z}) \leq \int dp l_0$ folgt $t_1 = t_2$ und damit die Behauptung.

Wir wenden nun die bisherigen Ergebnisse an, um eine Strukturaussage für die Rate-Distortion Funktion einer gedächtnisfreien Quelle zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ zu erhalten.

2.9 Lemma

Sei $(\Omega_{(n)}, \mathcal{B}_{(n)}, p_{(n)}, \mathcal{Z}_{(n)})$ eine gedächtnisfreie Quelle zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathcal{Z}_{(n)} \subseteq \mathcal{Z}_{(n)}$ derart, daß

$$\mathcal{Z}_{(n)} = \bigcap_{\nu=1}^n \mathcal{Z}_{\nu}, \quad \mathcal{Z}_{\nu} \subseteq \mathcal{Z}, \quad 1 \leq \nu \leq n$$

so gilt für alle $D \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad D_{p_{(n)}}(\min, \mathcal{Z}_{(n)}) &= \sum_{\nu=1}^n D_{p_{\nu}}(\min, \mathcal{Z}_{\nu}) \\ \text{(ii)} \quad D_{p_{(n)}}(\max, \mathcal{Z}_{(n)}) &= \sum_{\nu=1}^n D_{p_{\nu}}(\max, \mathcal{Z}_{\nu}) \\ \text{(iii)} \quad R_{p_{(n)}}(nD, \mathcal{Z}_{(n)}) &= \sup_{t \geq 0} \sum_{\nu=1}^n \left(\inf_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{Z}_{\nu})} \int d p_{\nu} \ln(h_{\lambda}^t) - tD \right) \end{aligned}$$

Beweis

$$\text{(i)} \quad D_{p_{(n)}}(\min, \mathcal{Z}_{(n)}) = \int d p_{(n)} \bigwedge_{l_{(n)} \in \mathcal{Z}_{(n)}} l_{(n)} = \sum_{\nu=1}^n \int d p_{\nu} \bigwedge_{l \in \mathcal{Z}_{\nu}} l$$

(da $d p_{(n)}$ Produktmaß, $\mathcal{Z}_{(n)}$ Produktmenge und

$$l_{(n)}(\omega_{(n)}) = \sum_{\nu=1}^n l_{\nu}(\omega_{\nu}) \quad \text{für alle } \omega_{(n)} \in \Omega_{(n)} \text{ ist})$$

(ii) folgt analog wie (i), nämlich:

$$D_{p_{(n)}}(\max, \mathcal{Z}_{(n)}) = \inf_{l_{(n)} \in \mathcal{Z}_{(n)}} \int d p_{(n)} l_{(n)} = \sum_{\nu=1}^n \inf_{l \in \mathcal{Z}_{\nu}} \int d p_{\nu} l$$

Um (iii) zu zeigen unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: sei $R_{p_{(n)}}(nD, \mathcal{Z}_{(n)}) < \infty$ und $t \geq 0$,

so folgt aus dem Beweis von Lemma 2.3 die Existenz

eines n -Tupels $(\tilde{\lambda}_{\nu})_{1 \leq \nu \leq n}$ mit $\tilde{\lambda}_{\nu} \in \Lambda(\mathcal{Z}_{\nu})$ für $1 \leq \nu \leq n$

$$\text{und } \sum_{\nu=1}^n \int d p_{\nu} \ln(h_{\tilde{\lambda}_{\nu}}^t) = \sum_{\nu=1}^n \inf_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{Z}_{\nu})} \int d p_{\nu} \ln(h_{\lambda}^t) \leq$$

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n \int d p_v \ln \left(\sum_{l \in \bar{x}_v} \frac{1}{| \bar{x}_v |} e^{-t l} \right)^{-1} &\leq \sum_{v=1}^n \int d p_v \ln \left(\bigvee_{l \in \bar{x}_v} \frac{1}{| \bar{x}_v |} e^{-t l} \right)^{-1} = \\ &= \sum_{v=1}^n \ln | \bar{x}_v | + t D_{P(n)}(\min, \bar{x}_{(n)}) \quad (\text{wegen (i)}) \\ &< \infty \quad (\text{wegen } R_{P(n)}(nD, \bar{x}_{(n)}) < \infty \quad \text{und Lemma 2.5}) \end{aligned}$$

Damit ist für jedes $\bar{\lambda}_v$, $1 \leq v \leq n$ die Voraussetzung von Lemma 2.6 gegeben, und dort die Aussage (i) erfüllt, woraus folgt:

$$\int d p_v h_{\bar{\lambda}_v}^t e^{-t l} \leq 1 \quad \text{für alle } 1 \leq v \leq n, \quad l \in \bar{x}_v$$

$$\text{Setzt man nun } \bar{\lambda}_{(n)}(l_{(n)}) := \prod_{v=1}^n \bar{\lambda}_v(l_v) \quad (l_{(n)} \in \bar{x}_{(n)})$$

so gilt für alle $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$

$$\begin{aligned} h_{\bar{\lambda}_{(n)}}^t(\omega_{(n)}) &= \left(\sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \bar{x}_{(n)}} \prod_{v=1}^n \bar{\lambda}_v(l_v) e^{-t l_v(\omega_v)} \right)^{-1} = \\ &= \sum_{v=1}^n h_{\bar{\lambda}_v}^t(\omega_v) \end{aligned}$$

und somit

$$\int d p_{(n)} h_{\bar{\lambda}_{(n)}}^t e^{-t l_{(n)}} = \prod_{v=1}^n \int d p_v h_{\bar{\lambda}_v}^t e^{-t l} \leq 1$$

Wiederum mit Lemma 2.6 erhalten wir dann

$$\inf_{\lambda \in \Lambda(\bar{x}_{(n)})} \int d p_{(n)} \ln(h_{\lambda}^t) = \int d p_{(n)} \ln(h_{\bar{\lambda}_{(n)}}^t) = \sum_{v=1}^n \int d p_v \ln(h_{\bar{\lambda}_v}^t)$$

und somit die Behauptung.

$$2. \text{ Fall } R_{P(n)}(nD, \bar{x}_{(n)}) = \infty$$

Aufgrund der Beweisführung im 1. Fall sieht man leicht, in der Behauptungsgleichung (iii) die linke Seite stets

kleiner oder gleich der rechten Seite sein muß. Also folgt auch im zweiten Fall die Behauptung.

Nach dem nächsten Lemma, das rein beweistechnischer Natur ist, werden wir in der Lage sein den Hauptsatz dieses Kapitels, nämlich eine obere Abschätzung der minimalen Rate von Quellencodes, die mit ihrem mittleren Verlust unter einer Schranke D bleiben, für eine große Klasse gedächtnisfreier Quellen herzuleiten. Diese Klasse wird im Wesentlichen durch die folgende Bedingung bestimmt.

(Bed. 1)

Eine gedächtnisfreie Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})_{v \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Bedingung (Bed. 1), falls gilt:

(i) Für alle $\epsilon > 0$ existiere ein $K_\epsilon \in \mathbb{N}$, mit

$$\inf_{\substack{\bar{x} \in \mathcal{X}, |\bar{x}| \leq K_\epsilon}} \int d p_v \bigwedge_{l \in \bar{x}} 1 \leq D_{p_v}(\min) + \epsilon \quad \text{für alle } v \in \mathbb{N}$$

(ii) Es existiert eine Konstante $\|\mathcal{X}\| \in \mathbb{R}$, derart daß für alle $l \in \mathcal{X}$ gilt:

$$I(\omega) \leq \|\mathcal{X}\| \quad \text{für } p_v\text{-fast alle } \omega \in \Omega, \text{ und alle } v \in \mathbb{N}$$

Bemerkung

Bedingung (Bed. 1) wird offensichtlich von allen

gedächtnisfreien Quellen mit diskretem Datenmeßraum und endlicher Anzahl von Verlustfunktionen erfüllt.

Das gleiche gilt für gedächtnisfreie Quellen, bei denen Ω ein kompakter Raum mit Metrik ρ , $\mathcal{B}$ von den offenen Mengen von Ω erzeugt, und $\mathcal{X} = \{\omega \rightarrow \rho(\omega, \omega') : \omega' \in \Omega\}$ ist.

2.10 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p_y, \mathcal{X})_{y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{X}_y)_{1 \leq y \leq n}$ und $(\bar{\mathcal{X}}_y)_{1 \leq y \leq n}$ n -Tupel endlicher Teilmengen von $\mathcal{X}$ mit $\bar{\mathcal{X}}_y \subseteq \mathcal{X}_y$ für alle $1 \leq y \leq n$, und sei $\sum_{y=1}^n D_{p_y}(\min, \bar{\mathcal{X}}_y) < nD \leq \sum_{y=1}^n D_{p_y}(\max, \bar{\mathcal{X}}_y)$, so gibt es ein n -Tupel $(\bar{\lambda}_y)_{1 \leq y \leq n}$ mit $\bar{\lambda}_y \in \Delta(\bar{\mathcal{X}}_y)$ für alle $1 \leq y \leq n$ und ein $\bar{t} \geq 0$, so daß gilt:

- (i) $\sum_{y=1}^n \int d p_y \ln(h_{\bar{\lambda}_y}^{\bar{t}}) \leq \max \left\{ \sum_{y=1}^n \inf_{\lambda \in \Delta(\bar{\mathcal{X}}_y)} \int d p_y \ln(h_{\lambda}^{\bar{t}}) ; t n D \right\}$
- (ii)
$$F(\bar{t}, (\bar{\lambda}_y)_{1 \leq y \leq n}) := \sum_{y=1}^n \sum_{1 \in \bar{\mathcal{X}}_y} \int p_y(d\omega) \bar{P}_{\bar{\lambda}_y}^{\bar{t}, \omega}(1) l(\omega) + \sqrt{2} \left[\sum_{y=1}^n \sum_{1 \in \bar{\mathcal{X}}_y} \int p_y(d\omega) \bar{P}_{\bar{\lambda}_y}^{\bar{t}, \omega}(1) \left(l(\omega) - \sum_{1 \in \bar{\mathcal{X}}_y} \bar{P}_{\bar{\lambda}_y}^{\bar{t}, \omega}(1) l(\omega) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = nD$$

wobei: $\bar{P}_{\bar{\lambda}_y}^{\bar{t}, \omega}(1) := \bar{\lambda}_y(1) e^{-\bar{t} l(\omega)} h_{\bar{\lambda}_y}^{\bar{t}}(\omega)$

(stochastischer Kern von $(\Omega, \mathcal{B})$ nach $\bar{\mathcal{X}}_y$ versehen

mit dem Borelkörper aller Teilmengen, für alle

$\bar{t} \geq 0$, $1 \leq y \leq n$; und es gilt wegen Definition 2.1

$$\sum_{1 \in \bar{\mathcal{X}}_y} \bar{P}_{\bar{\lambda}_y}^{\bar{t}, \omega}(1) = 1$$

Beweis

1. $\prod_{\nu=1}^n \Delta(\mathcal{X}_\nu)$ wird mittels der Metrik ρ , definiert durch

$$\rho((\lambda_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}, (\lambda'_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}) := \sup_{1 \leq \nu \leq n} \left| \sum_{1 \leq \lambda} \lambda_\nu(1) - \lambda'_\nu(1) \right|, \text{ zum}$$

kompakten metrischen Raum (wegen Isomorphie zu einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, $m < \infty$)

2. Sei $t \geq 0$, so ist $(\lambda_\nu)_{1 \leq \nu \leq n} \in \prod_{\nu=1}^n \Delta(\mathcal{X}_\nu) \rightarrow \sum_{\nu=1}^n \int d\rho_\nu \ln(h_{\lambda_\nu}^t)$

nach unten halbstetig (Beweis von Lemma 2.3!) und so-

mit ist $A^t := \left\{ (\lambda_\nu)_{1 \leq \nu \leq n} \in \prod_{\nu=1}^n \Delta(\mathcal{X}_\nu) : \sum_{\nu=1}^n \int d\rho_\nu \ln(h_{\lambda_\nu}^t) \leq \max \left[\sum_{\nu=1}^n \inf_{\lambda \in \Delta(\mathcal{X}_\nu)} \int d\rho_\nu \ln(h_\lambda^t), t n D \right] \right\}$ eine abgeschlossene

und auch zusammenhängende Menge, da mit $(\lambda_\nu^i)_{1 \leq \nu \leq n}$, $i=1,2$ auch $(\alpha \lambda_\nu^1 + (1-\alpha) \lambda_\nu^2)_{1 \leq \nu \leq n}$ für alle $\alpha \in [0,1]$ in A^t liegt.

3. Wir zeigen nun, daß die Menge $A := \bigcup_{t \geq 0} \{t\} \times A^t \subseteq$

$[0, \infty[\times \prod_{\nu=1}^n \Delta(\mathcal{X}_\nu)$ abgeschlossen und zusammenhängend in

der Produkttopologie ist. Dies sieht man wie folgt:

Seien A_i $i=1,2$ nicht-leere abgeschlossene Teilmen-

gen von A mit $A = A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so sind

die Projektionen $\pi_{A_i} := \{t : \exists (\lambda_\nu)_{1 \leq \nu \leq n} : (t, (\lambda_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}) \in A_i\}$ $i=1,2$ in $[0, \infty[$ abgeschlossen, denn sei o.b.d.A.

$(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in πA_1 mit $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = t_0 \in [0, \infty[$, so

gibt es eine Folge $[(\lambda_\nu^j)_{1 \leq \nu \leq n}]_{j \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus

$\prod_{\nu=1}^n \Delta(\mathcal{X}_\nu)$ mit $(t_j, (\lambda_\nu^j)_{1 \leq \nu \leq n}) \in A_1$ für alle $j \in \mathbb{N}$, und

wegen der Kompaktheit von $\prod_{\nu=1}^n \Delta(\mathcal{X}_\nu)$ gibt es eine

Teilfolge $(\lambda_{\nu}^{j_k})_{1 \leq \nu \leq n}$ die gegen ein $(\lambda_{\nu}^0)_{1 \leq \nu \leq n} \in \bigtimes_{\nu=1}^n \Lambda(\bar{x}_{\nu})$ konvergiert. Da nun $t \geq 0 \rightarrow \sum_{\nu=1}^n \int d p_{\nu} \ln(h_{\lambda_{\nu}}^t)$ wegen der Beschränktheit der Verlustfunktionen $((\text{Bed } 1), (ii))$ gleichmäßig für alle $(\lambda_{\nu})_{1 \leq \nu \leq n} \in \bigtimes_{\nu=1}^n \Lambda(\bar{x}_{\nu})$ stetig, und $(\lambda_{\nu})_{1 \leq \nu \leq n} \in \bigtimes_{\nu=1}^n \Lambda(\bar{x}_{\nu}) \rightarrow \sum_{\nu=1}^n \int d p_{\nu} \ln(h_{\lambda_{\nu}}^t)$ für jedes $t \geq 0$ nach unten halbstetig ist, folgt $(t_0, (\lambda_{\nu}^0)_{1 \leq \nu \leq n}) \in \hat{A}_0^t = A$ und somit, daß A abgeschlossen ist. Weiter erhält man da A_1 als abgeschlossen vorausgesetzt war, daß $(t_0, (\lambda_{\nu}^0)_{1 \leq \nu \leq n}) \in A_1$, also $t_0 \in \pi A_1$ und somit πA_1 abgeschlossen ist. (Völlig analog zeigt man, daß πA_2 abgeschlossen ist.) Aus dem Zusammenhang von $[0, \infty[$ und wegen $\pi A_1 \cup \pi A_2 = [0, \infty[$ (sieht man mittels der nach unten Halbstetigkeit von $(\lambda_{\nu})_{1 \leq \nu \leq n} \in \bigtimes_{\nu=1}^n \Lambda(\bar{x}_{\nu}) \rightarrow \sum_{\nu=1}^n \int d p_{\nu} \ln(h_{\lambda_{\nu}}^t)$, für alle $t \geq 0$, und der Kompaktheit von $\bigtimes_{\nu=1}^n \Lambda(\bar{x}_{\nu})$), folgt, daß ein $\hat{t} \in \pi A_1 \cap \pi A_2$ existieren muß; es sind dann $\hat{A}_i^{\hat{t}} := A_i \cap \hat{A}^{\hat{t}}$ $i=1,2$ nichtleere, abgeschlossene Mengen mit $\hat{A}_1^{\hat{t}} \cup \hat{A}_2^{\hat{t}} = \hat{A}^{\hat{t}}$ und $\hat{A}_1^{\hat{t}} \cap \hat{A}_2^{\hat{t}} = \emptyset$, was im Widerspruch zum Zusammenhang von $\hat{A}^{\hat{t}}$ steht. Es können also keine Mengen A_i $i=1,2$ mit den obigen Eigenschaften existieren, das heißt: A ist zusammenhängend.

4. Wir betrachten nun auf A die Funktion F , die wegen der Beschränktheit der Verlustfunktionen stetig ist.

Und zwar sei $(\lambda_v^1)_{1 \leq v \leq n} \in A^0$, so gilt:

$$F(0, (\lambda_v^1)_{1 \leq v \leq n}) \geq \sum_{v=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{Z}_v} \int_{P_v} (d\omega) P_{\lambda_v^1}^{\omega}(1) l(\omega) = \\ \sum_{v=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{Z}_v} \int_{P_v} d_p \lambda_v^1(1) l \geq \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\max, \mathcal{Z}_v) \geq nD$$

Andererseits, sei für alle $1 \leq v \leq n$, alle $1 \in \mathcal{Z}_v^0$,

$$\tilde{\lambda}_v(1) := \frac{1}{|\mathcal{Z}_v|}, \quad \tilde{t} := \max \left\{ \left(\sum_{v=1}^n \ln(\mathcal{Z}_v^0) \right) \left(nD - \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \mathcal{Z}_v^0) \right)^{-1}; \right. \\ \left. \left(\sum_{v=1}^n \ln(|\mathcal{Z}_v^0|) \right) \left(\sqrt{nD - \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \mathcal{Z}_v^0)} + \|\mathcal{X}\| - \sqrt{\|\mathcal{X}\|} \right)^{-2} \right\},$$

so gilt für alle $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_{(n)}$ Ungleichung (*):

$$\sum_{v=1}^n \bigwedge_{1 \in \mathcal{Z}_v^0} l(\omega_v) \leq \sum_{v=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{Z}_v^0} P_{\tilde{\lambda}_v}^{\omega_v}(1) l(\omega_v) = \frac{1}{\tilde{t}} \sum_{v=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{Z}_v^0} P_{\tilde{\lambda}_v}^{\omega_v}(1) \ln e^{\tilde{t} l(\omega_v)} \leq \\ \frac{1}{\tilde{t}} \sum_{v=1}^n \ln \left(\sum_{1 \in \mathcal{Z}_v^0} P_{\tilde{\lambda}_v}^{\omega_v}(1) e^{\tilde{t} l(\omega_v)} \right) = \frac{1}{\tilde{t}} \sum_{v=1}^n \ln \left(\sum_{1 \in \mathcal{Z}_v^0} \frac{1}{|\mathcal{Z}_v|} e^{-\tilde{t} l(\omega_v)} \right)^{-1} \leq \\ \frac{1}{\tilde{t}} \sum_{v=1}^n \ln \left(\bigvee_{1 \in \mathcal{Z}_v^0} \frac{1}{|\mathcal{Z}_v|} e^{-\tilde{t} l(\omega_v)} \right)^{-1} = \frac{1}{\tilde{t}} \sum_{v=1}^n \ln(|\mathcal{Z}_v^0|) + \sum_{v=1}^n \bigwedge_{1 \in \mathcal{Z}_v^0} l(\omega_v)$$

(wobei die Jensenungleichung für "ln" benutzt wurde)

Hieraus folgt zunächst durch Integration der Ungleichung (*) mit $dp_{(n)}$:

$$\sum_{v=1}^n \int_{P_v} d_p \ln(h_{\tilde{\lambda}_v}^{\tilde{t}}) \leq \sum_{v=1}^n \ln(|\mathcal{Z}_v^0|) + \tilde{t} \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \mathcal{Z}_v^0) \leq \tilde{t} nD$$

und somit auch: $(\tilde{t}, (\tilde{\lambda}_v)_{1 \leq v \leq n}) \in A^{\tilde{t}}$

Weiter folgt dann mit Ungleichung (*)

$$F(\tilde{t}, (\tilde{\lambda}_v)_{1 \leq v \leq n}) \leq \frac{1}{\tilde{t}} \sum_{v=1}^n \ln(|\mathcal{Z}_v^0|) + \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \mathcal{Z}_v^0) + \\ 2\sqrt{\|\mathcal{X}\|} \sqrt{\sum_{v=1}^n \int_{P_v} (d\omega) P_{\tilde{\lambda}_v}^{\omega}(1) (l(\omega) - \bigwedge_{1 \in \mathcal{Z}_v^0} l(\omega))} \leq \\ \left(\sqrt{\frac{1}{\tilde{t}} \sum_{v=1}^n \ln(|\mathcal{Z}_v^0|)} + \sqrt{\|\mathcal{X}\|} \right)^2 + \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \mathcal{Z}_v^0) - \|\mathcal{X}\| \leq nD$$

Wir haben somit für $(0, (\lambda_v^1)_{1 \leq v \leq n}) \in A$ und $(\tilde{t}, (\tilde{\lambda}_v)_{1 \leq v \leq n}) \in A$
 $F(0, (\lambda_v^1)_{1 \leq v \leq n}) \geq nD$ und $F(\tilde{t}, (\tilde{\lambda}_v)_{1 \leq v \leq n}) \leq nD$; aus
dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und dem
Zusammenhang von A folgt dann die Existenz eines
 $(\bar{t}, (\bar{\lambda}_v)_{1 \leq v \leq n}) \in A$, welches die Behauptungen erfüllt,
und für das zusätzlich $\bar{t} \in [0, \tilde{t}]$ gilt.

2.11 Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p_y, \mathcal{X})_{y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle,
die (Bed 1) genügt, und sei $\epsilon_0 > 0$, so gibt es ein
 $n_0 \in \mathbb{N}$, derart, daß für alle $n \geq n_0$ und alle $D \geq D_0$,
mit $D_0 := \epsilon_0 + \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{y=1}^m D_{p_y}(\min)$, gilt:

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{L_n} \right) : L_n \in \mathcal{C}_{(n)} \right\} \leq \frac{1}{n} R_{p_{(n)}}(nD) + \mathcal{O} \left(\sqrt{\frac{\log(n)}{n}} \right)$$

mit $\mathcal{O}(\cdot) \gg 0$

Beweis:

Wir definieren zunächst einige Hilfsgrößen und wenden
die vorangegangenen Lemmas an.

1. Wegen (Bed 1) gibt es ein $K_0 \in \mathbb{N}$ und eine Folge
 $(\mathcal{X}_v^0)_{1 \leq v \leq n}$ endlicher Teilmengen von $\mathcal{X}$, so daß gilt:

$$D_{p_y}(\min, \mathcal{X}_v^0) \leq D_{p_y}(\min) + \frac{1}{4} \cdot \epsilon_0 \quad \text{und} \quad |\mathcal{X}_v^0| \leq K_0 \quad (1)$$

für alle $v \in \mathbb{N}$

2. Wir definieren nun folgende reelle Zahlen:

$$a := \ln(K_0) \left(\sqrt{\frac{1}{4} \epsilon_0 + \|x\|} - \sqrt{\|x\|} \right)^{-2}$$

$$b := 2a\|x\|(\sqrt{2} + 1) + 1$$

$$c := \ln(K_0) + b + a\|x\| + \ln(2)$$

$$c(n) := \left(\ln(K_0) + \frac{b}{\sqrt{n}} + a\|x\| + \frac{\ln(2)}{n} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{\ln(n)}{n}} \right)^{-1}$$

$$(n \in \mathbb{N})$$

und wählen weiter $n_i \in \mathbb{N}$, $i=1,2,3,4$, derart, daß:

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n D_{P_\nu}(\min) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m D_{P_\nu}(\min) + \frac{1}{4} \cdot \epsilon_0$$

für alle $n \geq n_1$

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{8} \cdot \epsilon_0$$

für alle $n \geq n_2$

$$(\sqrt{2} a\|x\| + 1) \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \ln(K_0)$$

für alle $n \geq n_3$

$$\left(1 - \sqrt{\frac{\ln(n)}{n}} \right)^{-1} \leq 2$$

für alle $n \geq n_4$

so sei von nun ab $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ fest gewählt.

3. Aufgrund von Definition 2.1 gibt es ein n -Tupel $(\mathcal{Z}_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}$ endlicher Teilmengen von $\mathcal{X}$, so daß für alle $1 \leq \nu \leq n$: $\mathcal{Z}_\nu^0 \subseteq \mathcal{Z}_\nu$ und $R_{P_{(n)}}(nD, \bigtimes_{\nu=1}^n \mathcal{Z}_\nu) \leq R_{P_{(n)}}(nD) + \sqrt{n}$ (2)

Für das Weitere nehmen wir o.b.d.A. an, daß gilt:

$$nD \leq \sum_{\nu=1}^n D_{P_\nu}(\max, \mathcal{Z}_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^n D_{P_\nu}(\max, \mathcal{Z}_\nu^0) \quad (3)$$

denn die zweite Ungleichung ist wegen (2) stets erfüllt und falls $nD > \sum_{\nu=1}^n D_{P_\nu}(\max, \mathcal{Z}_\nu)$ wäre, so gäbe es $\bar{I}_\nu \in \mathcal{Z}_\nu$, $1 \leq \nu \leq n$ mit $\sum_{\nu=1}^n \int dP_\nu \bar{I}_\nu = \sum_{\nu=1}^n D_{P_\nu}(\max, \mathcal{Z}_\nu) < nD$ und

es ist dann $\{\bar{L}_{(n)}\} \in \mathcal{E}_{(n)}(D)$, wobei $\bar{L}_{(n)} := (\bar{L}_v)_{1 \leq v \leq n}$, und somit $\inf \left\{ \frac{\ln(|L_{(n)}|)}{n} : L_{(n)} \in \mathcal{E}_{(n)}(D) \right\} = 0$, also wegen der Nichtnegativität der Rate-Distortion Funktion die Behauptung erfüllt.

4. Wegen (3) und der folgenden Ungleichungskette, die man unter Berücksichtigung der Definition von n_0 erhält:

$$\begin{aligned} n(1 - 2\frac{\|x\|}{\sqrt{n}}) &\geq n(D_0 - 2\frac{\|x\|}{\sqrt{n}}) \geq n(D_0 - \frac{1}{4}\epsilon_0) \geq \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min) + n\frac{1}{2}\epsilon_0 \\ &\geq \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \bar{x}_v^0) + \frac{1}{4}\epsilon_0 \quad (\text{wegen (1)}) \geq \\ &\sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \bar{x}_v) + \frac{1}{4}\epsilon_0 \quad (\text{wegen (2)}) \end{aligned} \quad (4)$$

folgt mit Lemma 2.10 die Existenz eines Tupels $(\bar{t}, (\bar{\lambda}_v)_{1 \leq v \leq n})$ mit:

$$F(\bar{t}, (\bar{\lambda}_v)_{1 \leq v \leq n}) = n(D - 2\frac{\|x\|}{\sqrt{n}}) \quad (5)$$

$$\sum_{v=1}^n \int dP_v \ln(n \frac{\bar{t}}{\bar{\lambda}_v}) \leq \max \left\{ \sum_{v=1}^n \inf_{\lambda \in \Delta(\bar{x}_v)} \int dP_v \ln(n \frac{\bar{t}}{\lambda}); \bar{t}(nD - 2\sqrt{n}\|x\|) \right\} \quad (6)$$

und zusätzlich geht aus dem Beweis von Lemma 2.10 hervor, daß:

$$\begin{aligned} \bar{t} &\leq \left(\sum_{v=1}^n \ln(n \bar{x}_v^0) \right) \max \left\{ (n(1 - 2\frac{\|x\|}{\sqrt{n}}) - \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \bar{x}_v^0))^{-1}; \right. \\ &\quad \left. (\sqrt{nD - 2\sqrt{n}\|x\|} - \sum_{v=1}^n D_{P_v}(\min, \bar{x}_v^0) + \|x\| - \sqrt{\|x\|})^{-2} \right\} \\ &\leq (n \ln(K_0)) \max \left\{ n \frac{4}{\epsilon_0}; (\sqrt{n \frac{1}{4}\epsilon_0 + \|x\|} - \sqrt{\|x\|})^{-2} \right\} \quad ((1) \text{ und } (4)) \\ &\leq (\ln(K_0)) (\sqrt{\frac{1}{4}\epsilon_0 + \|x\|} - \sqrt{\|x\|})^{-2} = a \quad (7) \end{aligned}$$

wobei man die letzte Ungleichung mittels elementarer Kurvendiskussionen sieht.

5. Es sei nun N die kleinste natürliche Zahl größer oder gleich $\exp(R_{p(n)}(nD, \mathcal{L}_{(n)}) + \sqrt{n}b + \sqrt{n \ln(n)} c(n))$, wobei $\mathcal{L}_{(n)} := \bigtimes_{v=1}^n \mathcal{L}_v$, und sei $\bar{\lambda}_{(n)} \in \Delta(\mathcal{L}_{(n)})$ definiert durch $\bar{\lambda}_{(n)}(l_{(n)}) := \prod_{v=1}^n \bar{\lambda}_v(l_v)$ für alle $l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}$, so stellt

$$\bar{m} := \sum_{l_{(n)}^1 \in \mathcal{L}_{(n)}} \dots \sum_{l_{(n)}^N \in \mathcal{L}_{(n)}} \prod_{i=1}^N \bar{\lambda}_{(n)}(l_{(n)}^i) \int d p_{(n)} \bigwedge_{i=1}^N l_{(n)}^i$$

eine Randomisierung der mittleren Verluste von Quellencodes, deren Mächtigkeit höchstens N ist, dar.

Die Bedeutung von $\bar{m}$ wird klar, wenn wir einmal annehmen, daß $\bar{m} \leq nD$ gilt. Es muß dann ein N -Tupel

$(\hat{l}_{(n)}^i)_{1 \leq i \leq N}$ existieren mit:

$$\int d p_{(n)} \bigwedge_{i=1}^N \hat{l}_{(n)}^i \leq nD,$$

woraus folgt, daß $\hat{l}_{(n)} := \{\hat{l}_{(n)}^i : 1 \leq i \leq N\} \in \mathcal{C}_{(n)}(D)$ ist, und somit:

$$\inf \left\{ \frac{\ln(l_{(n)})}{n} : l_{(n)} \in \mathcal{C}_{(n)}(D) \right\} \leq \frac{\ln(N)}{n} \leq$$

$$\frac{1}{n} R_{p(n)}(nD, \mathcal{L}_{(n)}) + \frac{1}{\sqrt{n}} b + \sqrt{\frac{\ln(n)}{n}} c(n) + \frac{1}{n} \ln(2) \leq$$

$$\frac{1}{n} R_{p(n)}(nD) + \frac{1}{\sqrt{n}} (b+1) + \sqrt{\frac{\ln(n)}{n}} 2c + \frac{1}{n} \ln(2) \quad (\text{wegen (2)})$$

und der Definition von n_4);

das heißt es gilt die Behauptung. Ziel der weiteren

Beweispunkte ist es folglich, zu zeigen, daß $\bar{m} \leq nD$ ist.

6. Es seien für jedes $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$

$$\sigma'(\omega_{(n)}) := \left(\sum_{v=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}_v} \bar{P}_{\bar{\lambda}_v}^{\omega_v}(l) (l(\omega_v) - \sum_{l \in \mathcal{L}_v} \bar{P}_{\bar{\lambda}_v}^{\omega_v}(l) l(\omega_v)) \right)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$D(\omega_{(n)}) := \sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}_\nu} \frac{\bar{F}_\nu \omega_\nu(1)}{\bar{F}_{\bar{\lambda}_\nu}} l(\omega_\nu) + \sqrt{2} \delta(\omega_{(n)})$$

so gilt mit der Jensen-Ungleichung für $x \geq 0 \rightarrow \sqrt{x}$

$$\int p_{(n)}(d\omega_{(n)}) D(\omega_{(n)}) \leq F(\bar{t}, (\bar{\lambda}_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}) \quad (8)$$

und wir können $\bar{m}$ mit Berücksichtigung von (8), (5) und der Beschränktheit der Verlustfunktionen abschätzen:

$$\bar{m} \leq \sum_{l_{(n)}^1 \in \mathcal{L}_{(n)}^1} \dots \sum_{l_{(n)}^N \in \mathcal{L}_{(n)}^N} \prod_{i=1}^N \bar{\lambda}_{(n)}(l_{(n)}^i) \int p_{(n)}(d\omega_{(n)}) n \|x\|_B(\omega_{(n)}, l_{(n)}^1, \dots, l_{(n)}^N) + nD - 2\sqrt{n} \|x\|$$

wobei $B := \{(\omega_{(n)}, l_{(n)}^1, \dots, l_{(n)}^N) : \bigwedge_{i=1}^N l_{(n)}^i(\omega_{(n)}) > D(\omega_{(n)})\}$ und

1_B die Indikatorfunktion dieser Menge ist.

$$\text{Wegen } 1_B(\omega_{(n)}, l_{(n)}^1, \dots, l_{(n)}^N) = \prod_{i=1}^N 1_{\{l_{(n)}^i(\omega_{(n)}) > D(\omega_{(n)})\}}(\omega_{(n)}, l_{(n)}^i)$$

folgt weiter:

$$\bar{m} \leq nD - 2\sqrt{n} \|x\| + n \|x\| \left(\int p_{(n)}(d\omega_{(n)}) \underbrace{\bar{\lambda}_{(n)}\{l_{(n)} : l_{(n)}(\omega_{(n)}) > D(\omega_{(n)})\}}_{:= C(\omega_{(n)})} \right)^N$$

$$\leq nD - 2\sqrt{n} \|x\| + n \|x\| \left(\int p_{(n)}(d\omega_{(n)}) \exp[-N(1 - \bar{\lambda}_{(n)}(C(\omega_{(n)})))] \right)$$

wobei $\ln(x) \leq x-1$, $x \in [0, 1]$ benutzt wurde. (9)

Für alle $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$, und alle $l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}$ gilt nun:

$$1_{[C(\omega_{(n)})^{(1)}]} \geq 1_{\left\{l_{(n)} : \left| \sum_{\nu=1}^n (l_{(n)}^\nu - \frac{\bar{F}_\nu \omega_\nu(1)}{\bar{F}_{\bar{\lambda}_\nu}} l(\omega_\nu)) \right| \leq 2\delta(\omega_{(n)}) \right\}}^{(1)}$$

und hiermit

$$\bar{\lambda}_{(n)}(C(\omega_{(n)})) = \sum_{l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}} \prod_{\nu=1}^n \frac{\bar{F}_\nu \omega_\nu(l_{(n)}^\nu)}{\bar{F}_{\bar{\lambda}_\nu}} e^{\bar{t} l_{(n)}^\nu(\omega_\nu)} (\bar{F}_{\bar{\lambda}_\nu}(\omega_\nu))^{-1} 1_{[C(\omega_{(n)})^{(1)}]}(l_{(n)}) \geq$$

$$> \frac{1}{2} \prod_{\nu=1}^n (h_{\lambda_\nu}^{\bar{t}}(\omega_\nu))^{-1} \exp(\bar{t}(\sum_{1 \leq \nu} \frac{\bar{t} \omega_\nu}{\lambda_\nu} l(\omega_\nu) - \frac{1}{n} \sqrt{2} \sigma(\omega_{(n)})))$$

(wegen der Tschebyscheff-Ungleichung und der Definition
von $\sigma(\omega_{(n)})$)

Wir setzen nun dieses Ergebnis in (9) ein, wobei wir
noch $\sigma(\omega_{(n)})$ durch $\sqrt{n} \|k\|$ nach oben abschätzen und defi-
nieren:

$$g_\nu(\omega) := \frac{\ln(N)}{n} - \ln(h_{\lambda_\nu}^{\bar{t}}(\omega_\nu)) + \bar{t} \sum_{1 \leq \nu} \frac{\bar{t} \omega_\nu}{\lambda_\nu} l(\omega_\nu) - \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + \sqrt{2} \bar{t} \|k\|)$$

und erhalten dann:

$$\bar{m} \leq nD - 2\sqrt{n} \|k\| + \int n \|k\| \exp(-\frac{1}{2} \exp(\sum_{\nu=1}^n (g_\nu(\omega) + \frac{1}{\sqrt{n}}))) P_{(n)}(d\omega_{(n)})$$

und mit $\tilde{B} := \{\omega_{(n)} : \sum_{\nu=1}^n g_\nu(\omega) < 0\}$ folgt

$$\begin{aligned} \bar{m} &\leq nD - 2\sqrt{n} \|k\| + n \|k\| (\exp(-\frac{1}{2} \exp(\sqrt{n})) + P_{(n)}(\tilde{B})) \\ &\quad nD - \sqrt{n} \|k\| + n \|k\| P_{(n)}(\tilde{B}) \end{aligned} \quad (10)$$

(da $\exp(\frac{1}{2} \exp(x)) > x$ für alle $x \geq 1$)

Als nächstes Ziel streben wir eine obere Abschätzung
von $P_{(n)}(\tilde{B})$ an, und zwar gilt für alle $r \geq 0$:

$$P_{(n)}(\tilde{B}) \leq \int P_{(n)}(d\omega_{(n)}) \exp(-r \sum_{\nu=1}^n g_\nu(\omega)) = \prod_{\nu=1}^n \int dp_\nu e^{-r g_\nu} \quad (11)$$

weswegen wir nun die Funktion $r \geq 0 \rightarrow \sum_{\nu=1}^n \ln(\int dp_\nu e^{-r g_\nu})$,
die wir mit f bezeichnen, analysieren:

f ist auf $[0, \infty[$ zweifach stetig differenzierbar, da

$$|g_\nu(\omega)| \leq \max \left\{ \frac{\ln(N)}{n} + \bar{t} \|k\| ; \bar{t} \|k\| + \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + \sqrt{2} \bar{t} \|k\|) \right\} \leq$$

$\max \left\{ \frac{\ln(N)}{n} + a \|x\|; a \|x\| + \ln(K_0) \right\}$ (wegen (7) und der

und da Definition von n_3

$$\frac{\ln(N)}{n} \leq \frac{1}{n} R_{P(n)}(nD, \mathcal{Z}_{(n)}) + \frac{1}{\sqrt{n}} b + \sqrt{\frac{\ln(n)}{n}} \cdot c(n) + \frac{1}{n} \ln(2)$$

und

$$\frac{1}{n} R_{P(n)}(nD, \mathcal{Z}_{(n)}) \leq \frac{1}{n} R_{P(n)}(nD, \bigtimes_{y=1}^n \mathcal{Z}_y^0) \quad (\text{wegen (2)}) \leq \ln(K_0)$$

(wegen (1), (4) und Lemma 2.5) folgt weiter:

$$\begin{aligned} |g_y(\omega)| &\leq \ln(K_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} b + \sqrt{\frac{\ln(n)}{n}} \cdot c(n) + \frac{1}{n} \ln(2) + a \|x\| \\ &= c(n) \quad (\text{aufgrund der Definition von } c(n)) \end{aligned}$$

Hieraus und mit dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz von Integralen folgt dann die Existenz der Ableitungen von f , die sich berechnen, zu:

$$f'(r) = \sum_{y=1}^n \int dp_y \frac{e^{-r g_y}}{\int dp_y e^{-r g_y}} (-g_y)$$

$$f''(r) = \sum_{y=1}^n \int dp_y \frac{e^{-r g_y}}{\int dp_y e^{-r g_y}} (g_y - f'(r))^2$$

Aus dem Satz von Taylor folgt dann:

$$\begin{aligned} f(r) &\leq f(0) + r f'(0) + \frac{r^2}{2} \sup \{ f''(\tilde{x}) : \tilde{x} \in [0, r] \} \\ &\leq -r \sum_{y=1}^n \int dp_y g_y + \frac{r^2}{2} n (c(n))^2 \end{aligned}$$

und mit $r_0 := (c(n))^{-2} \frac{1}{n} \sum_{y=1}^n \int dp_y g_y$ erhalten wir aus (11)

$$P_{(n)}(\tilde{B}) \leq e^{f(r_0)} \leq \exp\left(-\frac{n}{2} (c(n))^{-2} \left(\frac{1}{n} \sum_{y=1}^n \int dp_y g_y\right)^2\right) \quad (12)$$

aus der Definition der g_y folgt aber

$$\sum_{y=1}^n \int dp_y g_y = \ln(\cdot) - \sum_{y=1}^n \int dp_y \ln(n_{\mathcal{X}_y}^{\bar{t}}) + \bar{t} \sum_{y=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{X}_y} \int_{\mathcal{P}} (d\omega) \frac{\bar{t} \omega}{n_{\mathcal{X}_y}} (\cdot) l(\omega)$$

$$= \sqrt{n}(\bar{t}\sqrt{2}\|x\| + 1) \geq \ln(N) - \sum_{\nu=1}^n \int d p_{\nu} \ln(h_{\lambda_{\nu}}^{\bar{t}}) + \bar{t}(nD - 2\sqrt{n}\|x\|) \\ - \bar{t}2 \left[\sum_{\nu=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{X}_{\nu}} \int p_{\nu}(d\omega) \bar{t}_{\lambda_{\nu}}^{\omega}(1) (1(\omega) - \sum_{1 \in \mathcal{X}_{\nu}} \bar{t}_{\lambda_{\nu}}^{\omega}(1) 1(\omega)) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{n}(\bar{t}\sqrt{2}\|x\| + 1) \quad (\text{wegen (5) und der Definition von } F)$$

$$\geq \ln(N) - \max \left\{ \sum_{\nu=1}^n \inf_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{X}_{\nu})} \int d p_{\nu} \ln(h_{\lambda}^{\bar{t}}) - \bar{t}nD ; -2\sqrt{n}\|x\|\bar{t} \right\} =$$

$$\sqrt{n}(2\alpha\|x\|(\sqrt{2}+1) + 1) \quad (\text{wegen (6), (7) und (Bed 1) (ii)})$$

$$\geq \ln(N) - R_{p(n)}(nD, \mathcal{X}_{(n)}) - \sqrt{nb} \geq \sqrt{n \ln(n)} c(n) \quad (13)$$

(wegen Lemma 2.9 (iii) und den Definitionen von N und b)

Dies bedeutet aber für die Abschätzung (12), daß:

$$R_{(n)}(B) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\| \quad \text{und damit wird (10) zu:}$$

$$\bar{m} \leq nD \quad \text{und mit der Überlegung 5.}$$

folgt die Behauptung.

Wir schließen nun ein Beispiel zur Berechnung der Rate-Distortion Funktion an, das in einer folgenden Bemerkung auch zur Diskussion der Bedeutung einer der Voraussetzungen des Satzes 2.11 dient.

2.12 Beispiel

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, p, \mathcal{X})$ gegeben durch: $\Omega = \{0, 1\}$; $p(0) = p_0 \geq \frac{1}{2}$
 $\mathcal{X} = \{1^0, 1^1\}$ mit $1^0(0) = 1^1(1) = 0$ und $1^0(1) = 1^1(0) = 1$

so gilt für alle $0 \leq D < 1 - p_0$:

$$R_p(D) = -p_0 \ln(p_0) - (1-p_0) \ln(1-p_0) + D \ln(D) + (1-D) \ln(1-D)$$

Denn sei für alle $t \geq \ln(\frac{p_0}{1-p_0})$ das Wahrscheinlichkeitsmaß λ_t gegeben, durch $\lambda_t(l^0) = (p_0 - e^{-t}(1-p_0))(1 - e^{-t})^{-1}$, so erhält man für $i=0,1$:

$$\begin{aligned} \ln(h_{\lambda_t}^t(i)) &= -\ln(\lambda_t(l^0)e^{-tl^0(i)} + \lambda_t(l^1)e^{-tl^1(i)}) = \\ &= -\ln(p(i)(1+e^{-t})) \end{aligned}$$

und für $j=0,1$

$$\sum_{i=0}^1 p(i) h_{\lambda_t}^t(i) e^{-tl^j(i)} = (1+e^{-t})^{-1} \left(\sum_{i=0}^1 e^{-tl^j(i)} \right) = 1$$

woraus mit Lemma 2.6 folgt

$$\sum_{i=0}^1 p(i) \ln(h_{\lambda_t}^t(i)) = \inf_{\lambda \in \Delta(\mathcal{X})} \sum_{i=0}^1 p(i) \ln(h_{\lambda}^t(i))$$

Durch Bildung der Ableitungen sieht man, daß die konkave Funktion $t \in [\ln(\frac{p_0}{1-p_0}), \infty[\rightarrow \sum_{i=0}^1 p(i) \ln(h_{\lambda_t}^t(i)) - tD$
 $= -\sum_{i=0}^1 p(i) \ln(p(i)) - \ln(1+e^{-t}) - tD$ für $D > 0$ ein lokales Maximum in $\bar{t} = \ln(\frac{1-D}{D})$ ($\geq \ln(\frac{p_0}{1-p_0})$ wegen $D \leq 1-p_0$) besitzt, bzw. für $D=0$ monoton steigend ist. Hieraus und wegen der Konkavität der Funktion:

$$t \geq 0 \rightarrow \inf_{\lambda \in \Delta(\mathcal{X})} \sum_{i=0}^1 p(i) \ln(h_{\lambda}^t(i)) - tD \quad \text{folgt somit:}$$

$$R_p(D) = \begin{cases} -\sum_{i=0}^1 p(i) \ln(p(i)) & \text{falls } D=0 \\ -\sum_{i=0}^1 p(i) \ln(p(i)) - \bar{t}D - \ln(1+e^{-\bar{t}}) = & \text{falls } D>0 \\ -\sum_{i=0}^1 p(i) \ln(p(i)) + D \ln(D) + (1-D) \ln(1-D) \end{cases}$$

Das heißt, $R_p(D)$ hat die behauptete Form.

2.13 Bemerkung

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ wie in Beispiel 2.12, aber mit $\frac{1}{2} < p_0 < 1$ und sei durch $p_\nu := p$ ($\nu \in \mathbb{N}$) die stationäre gedächtnisfreie Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, p_\nu, \mathcal{X})_{\nu \in \mathbb{N}}$ gebildet.

Offensichtlich gilt $D_{p_\nu}(\min) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und die Voraussetzung $D > \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m D_{p_\nu}(\min)$ des Satzes 2.11 ist in diesem Fall gleichbedeutend mit $D > 0$.

Für $D=0$ kann man aber im allgemeinen kein Resultat wie in Satz 2.11 erwarten, denn es gilt einerseits:

$$R_{p_{(n)}}(n0) = \sum_{\nu=1}^n R_{p_\nu}(0) = n \left(\sum_{i=0}^1 -p(i) \ln(p(i)) \right) < n \ln(2)$$

(wegen Lemma 2.9) und andererseits ist ein Quellen-

code $\hat{I}_{(n)}$ genau dann aus $\mathcal{C}_{(n)}(0)$ wenn $\hat{I}_{(n)} = \mathcal{X}_{(n)}$ ist, was bedeutet, daß

$$n \ln(2) = \inf \left\{ \ln(|I_{(n)}|) : I_{(n)} \in \mathcal{C}_{(n)}(0) \right\} > R_{p_{(n)}}(n0)$$

Zum Schluß dieses Paragraphen zeigen wir nun noch den Zusammenhang zwischen unserer Definition einer Rate-Distortion Funktion und der in der Literatur üblichen, die wie folgt lautete:

2.14 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ eine Quelle, sei für jedes endliche $\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}$ die Menge der stochastischen Kerne von $(\Omega, \mathcal{B})$ nach $\mathcal{Z}$, versehen mit dem Borelkörper der Potenzmenge, mit $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$

und deren Elemente mit $(F^\omega)_{\omega \in \Omega}$ bezeichnet; (für jedes $\omega \in \Omega$ ist F^ω ein endliches Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{Z}$). Wir definieren dann:

$$\tilde{R}_p(D, \mathcal{Z}) := \inf \left\{ \sum_{1 \in \mathcal{Z}} \int p(d\omega) F^\omega(1) \ln \left(\frac{dF^\omega}{d \int p(d\omega) F^\omega} (1) \right) : (F^\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{K}(\mathcal{Z}) \right. \\ \left. \sum_{1 \in \mathcal{Z}} \int p(d\omega) F^\omega(1) 1(\omega) \leq D \right\}$$

wobei $1 \in \mathcal{Z} \rightarrow \frac{dF^\omega}{d \int p(d\omega) F^\omega} (1)$ die Radon-Nikodym Dichte bezeichne, falls $F^\omega \ll \int p(d\omega) F^\omega$, und sonst identisch der Funktion $1 \in \mathcal{Z} \rightarrow \infty$ sei.

$$\tilde{R}_p(D) := \inf \left\{ R_p(D, \mathcal{Z}) : \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}, |\mathcal{Z}| < \infty \right\}$$

2.15 Satz

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Definition 2.14 gilt für alle $D > D_p(\min)$: $\tilde{R}_p(D) = R_p(D)$

Beweis

Sei $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}, |\mathcal{Z}| < \infty$, mit $D_p(\min, \mathcal{Z}) < D$, so zeigen wir:

$$1. \quad \tilde{R}_p(D, \mathcal{Z}) \geq R_p(D, \mathcal{Z})$$

Falls $\tilde{R}_p(D, \mathcal{Z}) = \infty$, so ist nichts mehr zu zeigen.

Falls $\tilde{R}_p(D, \mathcal{Z}) < \infty$, so gilt für alle $(F^\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{K}(\mathcal{Z})$, mit

$$\sum_{1 \in \mathcal{Z}} \int p(d\omega) F^\omega(1) 1(\omega) \leq D, \text{ und alle } t \geq 0:$$

$$\sum_{1 \in \mathcal{Z}} \int p(d\omega) F^\omega(1) \ln \left(\frac{dF^\omega}{d \int p(d\omega) F^\omega} (1) \right) \geq \\ \int_{\Omega} p(d\omega) \left(\sum_{1 \in \mathcal{Z}} F^\omega(1) \ln \left(\frac{F^\omega(1)}{\int p(d\omega) F^\omega(1)} \right) \right) + t \left(\sum_{1 \in \mathcal{Z}} \int p(d\omega) F^\omega(1) 1(\omega) - D \right)$$

wobei $\tilde{\Omega} := \{\omega : P^\omega \ll \int p(d\omega) P^\omega\}$ und $\mathcal{X}^\omega := \{l \in \mathcal{X} : P^\omega(1) > 0\}$

(man sieht leicht, daß $p(\tilde{\Omega}) = 1$ gilt)

$$\begin{aligned} &= \int_{\tilde{\Omega}} p(d\omega) \left(- \sum_{l \in \mathcal{X}^\omega} P^\omega(1) \ln \left(\frac{\int p(d\omega) P^\omega(1)}{P^\omega(1)} e^{-tl(\omega)} \right) - tD \right) \geq \\ &\int_{\tilde{\Omega}} p(d\omega) \ln \left(\sum_{l \in \mathcal{X}^\omega} \left(\int p(d\omega) P^\omega(1) \right) e^{-tl(\omega)} \right)^{-1} - tD \geq \\ &\inf_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{X})} \int p(d\omega) \ln(h_\lambda^t) - tD \end{aligned} \quad (1)$$

(wobei für die vorletzte Ungleichung die Jensen-Ungleichung für die konvexe Funktion $x > 0 \rightarrow -\ln(x)$ angewandt wurde und die letzte Ungleichung mit $p(\tilde{\Omega}) = 1$ folgt.)

Mit den entsprechenden Definitionen folgt dann aus (1)

$$\tilde{R}_p(D, \mathcal{X}) \geq R_p(D, \mathcal{X}) \quad (2)$$

Wir zeigen nun

$$2. \quad \tilde{R}_p(D, \mathcal{X}) \leq R_p(D, \mathcal{X}) \quad (3)$$

Falls $D \geq D_p(\max, \mathcal{X})$ so gibt es ein $\bar{l} \in \mathcal{X}$ derart, daß

$$\int p(d\omega) \bar{l}(\omega) \leq D; \quad \text{sei dann für alle } \omega \in \Omega \text{ und alle } l \in \mathcal{X}$$

$$\bar{P}^\omega(1) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{l} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{so ist } (\bar{P}^\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \text{ und}$$

es gilt $\int p(d\omega) \left(\sum_{l \in \mathcal{X}} \bar{P}^\omega(1) l(\omega) \right) \leq D$ und

$$\sum_{l \in \mathcal{X}} \int p(d\omega) \bar{P}^\omega(1) \ln \left(\frac{d\bar{P}^\omega}{d\int p(d\omega) \bar{P}^\omega(1)}(1) \right) = 0, \quad \text{woraus}$$

$$\tilde{R}_p(D, \mathcal{X}) = 0 \quad \text{und somit die Ungleichung (3) folgt.}$$

Falls $D < D_p(\max, \mathcal{X})$, so gibt es gemäß Satz 2.8 ein Tupel

$(\bar{t}, \bar{\lambda}) \in]0, \infty[\times \Lambda(\mathcal{X})$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad \int dp \ln(h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}}) - \bar{t}D = R_p(D, \mathcal{X})$$

$$(ii) \int dp \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \bar{\lambda}(l) e^{-\bar{t}l} \right) h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}} = D$$

$$(iii) \int dp e^{-\bar{t}l} h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}} \leq 1 \quad \text{für alle } l \in \mathcal{L}$$

Für den stochastischen Kern $\tilde{P}_{\bar{\lambda}}^{\omega}(l) = \bar{\lambda}(l) e^{-\bar{t}l(\omega)} h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}}(\omega)$ folgt somit aus (ii) $\sum_{l \in \mathcal{L}} \int p(d\omega) \tilde{P}_{\bar{\lambda}}^{\omega}(l) l(\omega) = D$ und aus (iii) $\int p(d\omega) \tilde{P}_{\bar{\lambda}}^{\omega}(l) = \bar{\lambda}(l)$ für alle $l \in \mathcal{L}$ und damit folgt aus (i) $\sum_{l \in \mathcal{L}} \int p(d\omega) \tilde{P}_{\bar{\lambda}}^{\omega}(l) \ln \left(\frac{d\tilde{P}_{\bar{\lambda}}^{\omega}}{dp(d\omega)}(l) \right) = \int dp \ln(h_{\bar{\lambda}}^{\bar{t}}) - \bar{t}D = R_p(D, \mathcal{L})$; das heißt es gilt (3).

3. Seien nun $(\mathcal{L}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{L}'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen endlicher Teilmengen von $\mathcal{L}$, derart, daß:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} R_p(D, \mathcal{L}_\nu) = R_p(D) \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{R}_p(D, \mathcal{L}'_\nu) = \tilde{R}_p(D) \quad (4)$$

so gilt für $\mathcal{L}'_\nu := \mathcal{L}_\nu \cup \mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'_\nu := \mathcal{L}'_\nu \cup \mathcal{L}$

$$D_p(\min, \mathcal{L}'_\nu) < D \quad \text{und} \quad D_p(\min, \mathcal{L}'_\nu) < D \quad \text{und somit wegen} \\ (2) \text{ und } (3) \quad R_p(D, \mathcal{L}'_\nu) = \tilde{R}_p(D, \mathcal{L}'_\nu) \quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund der Definition der Rate-Distortion Funktionen und (4) folgt dann die Behauptung.

Bemerkung

Weicht man den Begriff des Quellencodes auf, indem man ihn als ein Element von $\mathcal{K}(\mathcal{L})$, die Rate eines solchen Codes mit $\sum_{l \in \mathcal{L}} \int p(d\omega) \tilde{P}^{\omega}(l) \ln \left(\frac{d\tilde{P}^{\omega}}{dp(d\omega)}(l) \right)$, definiert, so lassen sich für diese Begriffe zu Lemma 2.2 und Satz 2.11 analoge Resultate herleiten. Mit Satz 2.15 folgt dann, daß diese Quellencodes bezüglich der Problemstellung dieses Kapitels nicht "besser" sind wie die Bisherigen.

Kapitel II D-Schwellenwertverluste von Quellencodes

Allgemeine Voraussetzung

Die Verlustfunktionen aller, in diesem Kapitel vorkommender Quellen $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})$ seien beschränkt; das heißt, es existiert ein $\|\mathcal{L}\| < \infty$, so daß für alle $l \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\sup_{\omega \in \Omega} l(\omega) \leq \|\mathcal{L}\|$$

Wir werden uns in diesem Kapitel mit dem folgenden Problem beschäftigen.

Es bezeichne bei gegebener gedächtnisfreier Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})_{\nu \in \mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $D \geq 0$, $R \geq 0$

$$P_{(n)}(D, R) := \inf \left\{ p_{(n)} \left\{ \omega_{(n)} : \bigwedge_{l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}} l_{(n)}(\omega_{(n)}) > nD \right\} : \frac{\ln(|\mathcal{L}_{(n)}|)}{n} \leq R \right. \\ \left. \mathcal{L}_{(n)} \subseteq \mathcal{L}_{(n)} \right\}$$

Problem: Gibt es eine untere und obere Abschätzung von $\frac{1}{n} \ln(P_{(n)}(D, R))$ deren Parameterabhängigkeit bezüglich der Schwelle D und der Rate R mathematisch leichter handzuhaben ist als $\frac{1}{n} \ln(P_{(n)}(D, R))$ selbst, und die höchstens bis auf additive, mit wachsendem n gegen Null strebende Terme gleich sind.

§ 1 Eigenschaften der Abschätzungsparameter

In den nächsten Paragraphen wird sich zeigen, daß die unten definierte Funktionenschar $(H_t)_{t \geq 0}$ für unsere Abschätzungen von entscheidender Bedeutung ist. Um dort vom Ablauf der Beweise nicht unnötig abzulenken, werden wir in diesem Paragraphen eine umfangreiche Analyse dieser Schar durchführen.

Vorbemerkung

Bis auf Weiteres sei stets eine Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ gegeben, und es bezeichne $L_1(\Omega, \mathcal{B}, p)$ den Banachraum der Äquivalenzklassen p -integrierbarer reeller Funktionen auf Ω (Äquivalenzrelation: $f \sim g \iff f(\omega) = g(\omega)$ für p -fast alle $\omega \in \Omega$, Norm: $\|f\| := \int dp|f|$). Wir werden aber im Allgemeinen die Elemente von L_1 wie Funktionen behandeln, da wir nur an Eigenschaften interessiert sind, die p -fast überall (p -f.ü.) gelten.

1.1 Definition

Es sei für jedes $t \geq 0$ $\mathcal{H}(t) := \overline{\text{co}} \{e^{-t1} : 1 \in \mathcal{X}\}$ der Abschluß in der Normtopologie der konvexen Hülle von $\{e^{-t1} : 1 \in \mathcal{X}\}$, aufgefaßt als Teilmenge von $L_1(\Omega, \mathcal{B}, p)$; so definieren wir folgende Funktionenschar:

$$H_t: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$$

$$r \longrightarrow H_t(r) := \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \ln(\int dp h^{-r})$$

1.2 Lemma

(i) Für jedes $t \geq 0$ ist $\mathcal{H}(t)$ eine schwach kompakte Menge, und es gilt für alle $h \in \mathcal{H}(t)$:

$$e^{-t\|h\|} \leq h \leq 1 \quad p\text{-fast überall}$$

(ii) Sei $t \geq 0$ und $(h_a)_{a \in A}$ eine verallgemeinerte Folge, die schwach gegen ein $h_0 \in \mathcal{H}(t)$ konvergiert, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a_\varepsilon \in A$, mit:

$$\int dp h_0^{-r} \leq e^{r\varepsilon} \int dp h_{a_\varepsilon}^{-r} \quad \text{für alle } a \geq a_\varepsilon, r > 0$$

(iii) Für alle $t \geq 0, r > 0$ gilt:

$$H_t(r) = \min_{h \in \mathcal{H}(t)} \ln(\int dp h^{-r}) =$$

$$\inf_{h \in \text{co}\{e^{-t\|l\|}: l \in \mathcal{X}\}} \ln(\int dp h^{-r})$$

Beweis

(i) Aus der Tatsache, daß die Verlustfunktionen nicht-negativ und durch $\|h\|$ beschränkt (allgemeine Voraussetzung dieses Kapitels) sind, erhalten wir sofort:

$$e^{-t\|h\|} \leq h \leq 1 \quad p\text{-f.ü. für alle } h \in \mathcal{H}(t) \quad (1)$$

und damit:

$$\lim_{p(B) \rightarrow 0, B \in \mathcal{B}} \int_B dp h = 0 \quad \text{gleichmäßig für alle } h \in \mathcal{H}(t)$$

Nach Dunford-Schwartz, [2], Korollar IV 8.11, folgt hieraus die bedingt schwache Folgenkompaktheit von $\mathcal{K}(t)$. Da nun $L_1(\Omega, \mathcal{B}, p)$ ein Banachraum ist, folgt weiter mit dem Satz von Eberlein die bedingt schwache Kompaktheit von $\mathcal{K}(t)$. Wegen der Konvexität und der Normabgeschlossenheit von $\mathcal{K}(t)$ ist diese Menge dann aber auch schwach abgeschlossen und schwach kompakt.

(ii) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Elementarfunktion g , mit:

$$g = \sum_{j=1}^J g_j \cdot 1_{E_j}, \quad g_j \in [e^{-t\|x\|}, 1], \quad E_j \in \mathcal{B}, \quad 1 \leq j \leq J < \infty$$

und $|h_0 - g| \leq \frac{\varepsilon}{3} e^{-t\|x\|} \quad p\text{-f.ü.} \quad (2)$

Da $(h_a)_{a \in A}$ schwach gegen h_0 konvergiert, gibt es ein $a_\varepsilon \in A$, derart, daß für alle $a \succ a_\varepsilon$ gilt: (3)

$$\max_{1 \leq j \leq J, p(E_j) > 0} \frac{1}{p(E_j)} \left| \int_{E_j} dp h_0 - \int_{E_j} dp h_a \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} e^{-t\|x\|}$$

Unter Berücksichtigung von (1) erhalten wir durch den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, angewandt auf die Funktion $x \in [e^{-t\|x\|}, 1] \rightarrow \ln(x)$:

$$|\ln(h_0) - \ln(g)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad p\text{-f.ü.} \quad (4)$$

$$|\ln(g_j) - \ln\left(\frac{1}{p(E_j)} \int_{E_j} dp h_a\right)| \leq \frac{2}{3} \varepsilon \quad \text{für alle } a \succ a_\varepsilon,$$

$$1 \leq j \leq J, p(E_j) > 0$$

Für alle $r > 0$, und alle $a \succ a_\varepsilon$, gilt dann mit (4):

$$\int dp h_0^{-r} \leq e^{r \frac{\varepsilon}{3}} \int dp g^{-r} = e^{r \frac{\varepsilon}{3}} \sum_{j=1}^J p(E_j) g_j^{-r} \leq$$

$$e^{r \frac{\varepsilon}{3}} \sum_{j=1, p(E_j) > 0}^J p(E_j) \left(\frac{1}{p(E_j)} \int_{E_j} dp h_a \right)^{-r} \leq$$

$$e^{r\varepsilon} \sum_{j=1}^J \int_{E_j} dp \, h_e^{-r} \leq e^{r\varepsilon} \int dp \, n_a^{-r}$$

(Wegen der Jensen-Ungleichung für $x \geq 0 \longrightarrow x^{-r}$ und wegen $h_e \geq 0$ p-f.ü., für alle $a \in A$)

(iii) Aus (ii) folgt sofort, daß für jedes $t \geq 0$, $r > 0$ die Funktion $h \in \mathcal{X}(t) \longrightarrow \ln(\int dp \, h^{-r})$ nach unten schwach halbstetig ist, und somit auf dem Kompaktum $\mathcal{X}(t)$ ihr Infimum annimmt; das heißt, es gilt die erste Gleichung der Behauptung. Sei nun $h_0 \in \mathcal{X}(t)$ derart, daß $\ln(\int dp \, h_0^{-r}) = H_t(r)$, so gibt es eine Folge endlicher Wahrscheinlichkeitsmaße $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{X}$ mit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dp \, |h_0 - \sum_{l \in \mathbb{N}} \lambda_n(l) e^{-tl}| = 0$$

so folgt unter Berücksichtigung von

$$|x^{-r} - y^{-r}| \leq |x - y| r e^{(1+r)t\|\mathcal{X}\|} \text{ für alle } x, y \in [e^{-t\|\mathcal{X}\|}, 1]$$

(sieht man sofort aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int dp \, h_0^{-r} - \int dp \, \left(\sum_{l \in \mathbb{N}} \lambda_n(l) e^{-tl} \right)^{-r} \right| \leq$$

$$r e^{(1+r)t\|\mathcal{X}\|} \lim_{n \rightarrow \infty} \int dp \, |h_0 - \sum_{l \in \mathbb{N}} \lambda_n(l) e^{-tl}| = 0$$

Mit der Stetigkeit des Logarithmus folgt damit die zweite Gleichung der Behauptung.

Das folgende Lemma charakterisiert diejenigen $h_0 \in \mathcal{X}(t)$, welche $h \in \mathcal{X}(t) \longrightarrow \ln(\int dp \, h^{-r})$ minimisieren.

1.3 Lemma

Sei $t > 0$, $r > 0$, und $n_0 \in \mathcal{X}(t)$, so sind äquivalent:

$$(i) \quad \ln \left(\int dp \, n_0^{-r} \right) = H_t(r)$$

$$(ii) \quad \int dp \, h_0^{-r} \frac{h}{n_0} \leq \int dp \, h_0^{-r} \quad \text{für alle } h \in \mathcal{X}(t)$$

Weiterhin gibt es genau ein $h_0 \in \mathcal{X}(t)$, das (i) erfüllt.

Beweis

Angenommen es gilt (ii), so ist für alle $h \in \mathcal{X}(t)$

$$\int dp \, \frac{n_0^{-r}}{\int dp \, n_0^{-r}} (h_0^r n^{-r})^{-\frac{1}{r}} \leq 1$$

und mit der Jensen-Ungleichung für $x > 0 \rightarrow x^{-\frac{1}{r}}$ folgt:

$$\left(\frac{\int dp \, n^{-r}}{\int dp \, h_0^{-r}} \right)^{-\frac{1}{r}} \leq 1 \quad \text{für alle } h \in \mathcal{X}(t)$$

dies ist aber nichts anderes wie (i).

Angenommen es gilt (i), so ist für jedes $h \in \mathcal{X}(t)$

$$\alpha \in [0, 1] \rightarrow f(\alpha) := \int dp (\alpha h_0 + (1-\alpha)h)^{-r} \text{ an der Stelle}$$

$\alpha=1$ differenzierbar; denn für jedes $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{(\alpha n_0(\omega) + (1-\alpha)n(\omega))^{-r} - n_0(\omega)^{-r}}{-\alpha} = -r n_0(\omega)^{-r-1} (h_0(\omega) - h(\omega))$$

$$\text{und gleichzeitig} \quad h_0(\omega)^{-r-1} |h_0(\omega) - h(\omega)| \leq e^{(1+r)t\|\mathcal{X}\|}$$

(wegen der Beschränktheit der Verlustfunktionen),

woraus mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

und dem Satz von Lebesgue die Differenzierbarkeit von f

folgt, und sich die Ableitung berechnet, zu:

$$f'(1) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{f(\alpha) - f(1)}{\alpha - 1} = -r \int dp h_0^{-r-1} (h_0 - h) \quad (*)$$

Wegen der Voraussetzung (i) gilt aber $f'(1) \leq 0$, woraus mit (*) die Aussage (ii) folgt.

Die Existenz eines $h_0 \in \mathcal{X}(t)$, welches (i) erfüllt, erhält man aus Lemma 1.2 (iii). Angenommen es gibt ein weiteres $h_1 \in \mathcal{X}(t)$, mit $\ln(\int dp h_1^{-r}) = H_t(r)$, so gilt:
$$e^{H_t(r)} = \int dp (\frac{1}{2} h_0^{-r} + \frac{1}{2} h_1^{-r}) \geq \int dp (\frac{1}{2} h_0 + \frac{1}{2} h_1)^{-r} \geq e^{H_t(r)}$$
 (Jensen-Ungleichung für $x > 0 \rightarrow x^{-r}$).

In dieser Ungleichungskette muß also überall das Gleichheitszeichen stehen, was wegen der strikten Konvexität von $x > 0 \rightarrow x^{-r}$ zur Folge hat, daß $h_0 = h_1$ p-f.ü. .

1.4 Definition

Für $t > 0$, $r > 0$, sei $h_{t,r}$ dasjenige Element von $\mathcal{X}(t)$, für das gilt: $H_t(r) = \ln(\int dp h_{t,r}^{-r})$ und es sei $p_{t,r}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B})$, definiert durch:

$$dp_{t,r} = dp \frac{h_{t,r}^{-r}}{\int dp h_{t,r}^{-r}}$$

($h_{t,r}$ ist wegen Lemma 1.3 wohl definiert).

1.5 Lemma

Für jedes $t > 0$ ist die Funktion:

$$r \in [0, \infty[\rightarrow H_t(r) \quad \text{konvex.}$$

Beweis

Seien $r_1, r_2 > 0$, $\bar{r} := \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, $r(i) := -\frac{1+\bar{r}}{1+r_i} r_i$,
 $i=1,2$, so folgt mit Lemma 1.3 für alle $i=1,2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r_i} H_t(r_i) + \frac{r_i}{1+r_i} H_t(\bar{r}) &\geq \\ \frac{1}{1+r_i} \ln(\int dp(h_{t,r_i})^{-r_i}) + \frac{r_i}{1+r_i} \ln(\int dp(h_{t,\bar{r}})^{-\bar{r}-1} h_{t,r_i}) &\geq \\ \ln(\int dp(h_{t,\bar{r}})^{r(i)}) &\quad (\text{Hölder-Ungleichung!}) \end{aligned}$$

Wir erhalten dann folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H_t(r_1) + \frac{1}{2} H_t(r_2) + \bar{r} H_t(\bar{r}) &= \\ \sum_{i=1}^2 \frac{1+r_i}{2} \left(\frac{1}{1+r_i} H_t(r_i) + \frac{r_i}{1+r_i} H_t(\bar{r}) \right) &\geq \\ (1+\bar{r}) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{1+r_i}{1+\bar{r}} \frac{1}{2} \ln(\int dp(h_{t,\bar{r}})^{r(i)}) \right) &\geq (1+\bar{r}) H_t(\bar{r}) \end{aligned}$$

(wobei wiederum die Hölder-Ungleichung benutzt wurde;

$$\text{man beachte: } \sum_{i=1}^2 \frac{1+r_i}{2(1+\bar{r})} r(i) = -\bar{r})$$

und damit die Behauptung. (denn $\lim_{r \rightarrow 0} H_t(r) = H_t(0)$)

1.6 Korollar

Für jedes $t \geq 0$ ist $r \in]0, \infty[\longrightarrow \frac{1}{r} H_t(r)$
monoton steigend.

Beweis

Für r_1, r_2 gilt: $\frac{1}{r_2} H_t(r_2) = \frac{1}{r_2} H_t\left(\frac{r_2}{r_1} r_1 + 0\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)\right) \leq$
 $\frac{1}{r_1} H_t(r_1)$ (wegen Lemma 1.5 und $H_t(0) = 0$)

1.7 Lemma

Für jedes $t > 0$ gilt:

$$(i) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_t(r) = \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1})$$

wobei $\mathcal{M}(p)$ die Menge der p -stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{B})$ bezeichne.

$$(ii) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} H_t(r) = \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp \ln(h^{-1})$$

Beweis

(i) Sei $h \in \mathcal{H}(t)$, so gilt:

$$\ln(h^{-1}) \leq \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) \quad p\text{-f.ü.} \quad (1)$$

denn wäre mit $B := \{\omega : \ln(h(\omega)^{-1}) > \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1})\}$ $p(B) > 0$, so definiere man $p_B \in \mathcal{M}(p)$ durch $dp_B = dp \cdot 1_B \frac{1}{p(B)}$ und man erhielte: $\int dp_B \ln(h^{-1}) > \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1})$.

Aus (1) erhalten wir dann:

$$\frac{1}{r} H_t(r) \leq \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) \quad \text{für alle } r > 0 \quad (2)$$

Weiter existiert wegen der schwachen Kompaktheit von $\mathcal{H}(t)$ eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen, und ein $h_t \in \mathcal{H}(t)$, derart, daß die Folge $(h_{t, r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen h_t konvergiert. Aus Lemma 1.2 (ii) folgt dann, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\frac{1}{r} \ln(\int dp h_t^{-r}) \leq \frac{1}{r} \ln(\int dp h_{t, r_n}^{-r}) + \varepsilon \quad \text{für alle } r > 0, n \geq n_\varepsilon$$

und wir erhalten mit Korollar 1.6 :

$$\frac{1}{r_n} \ln(\int dp(h_t)^{-r_n}) \leq \frac{1}{r_n} H_t(r_n) + \varepsilon \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_t(r) + \varepsilon \quad (3)$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$

Andererseits gilt für jedes $\delta > 0$:

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln(\int dp h_t^{-r}) \geq \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h_t^{-1}) - \delta \quad (4)$$

denn sei $B_\delta := \{\omega: \ln(h_t(\omega)^{-1}) \geq \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h_t^{-1}) - \delta\}$

so gilt offensichtlich $p(B_\delta) > 0$ und wir erhalten mit

der Abkürzung $s := \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h_t^{-1})$ für alle $r > 0$:

$$\frac{1}{r} \ln(\int dp h_t^{-r}) \geq \frac{1}{r} \ln(e^{r(s-\delta)} (p(B_\delta) + \int_{B_\delta^c} dp(h_t e^{(s-\delta)})^{-r}))$$

und somit die Behauptung (4), wenn man beachtet, daß:

$$h_t e^{(s-\delta)} < 1 \quad \text{p-f.ü. auf } B_\delta.$$

Aus (2), (3) und (4) folgt dann die Ungleichung:

$$\sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h_t^{-1}) \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln(\int dp h_t^{-r}) \leq$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} \ln(\int dp(h_t)^{-r_n}) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_t(r) \leq$$

$$\inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1})$$

und damit die Behauptung (i)

(ii) Es gilt für alle $r > 0$ stets:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} H_t(r) &= \frac{1}{r} \ln(\int dp h_{tr}^{-r}) = \frac{1}{r} \ln(\int dp e^{r \ln(h_{tr}^{-1})}) \geq \\ &\int dp \ln(h_{tr}^{-1}) \quad (\text{Jensen-Ungleichung für } x > 0 \rightarrow e^x) \geq \\ &\inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp \ln(h^{-1}) \end{aligned} \quad (5)$$

Andererseits gilt für alle $r > 0$, $h \in \mathcal{H}(t)$:

$$\frac{1}{r} \int dp h^{-r} \ln(h^{-r}) \geq \frac{1}{r} \left(\int dp h^{-r} \right) \ln \left(\int dp h^{-r} \right) \geq \frac{1}{r} H_t(r) \quad (6)$$

(Jensen-Ungleichung für die konvexe Funktion:

$x > 0 \rightarrow x \ln(x)$ und Lemma 1.2 (i))

Wiederum mit Lemma 1.2 (i) erhalten wir:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int dp h^{-r} \ln(h^{-r}) = \int dp \ln(h^{-1}) \text{ gleichmäßig in } h \in \mathcal{H}(t)$$

und somit folgt aus (5) und (6):

$$\inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp \ln(h^{-1}) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp h^{-r} \ln(h^{-r}) \geq$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} H_t(r) \geq \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp \ln(h^{-1})$$

das heißt: es gilt die Behauptung (ii).

1.8 Lemma

Für alle $t > 0$ gilt:

$$(i) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int dp_{t,r} \ln(h_{t,r}^{-1}) = \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1})$$

$$(ii) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int dp_{t,r} \ln(h_{t,r}^{-1}) = \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp \ln(h^{-1})$$

$$(iii) \quad \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) = \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1})$$

Beweis

Gemäß Lemma 1.3 gilt für alle $t > 0$, $r > 0$:

$$\int dp_{t,r} \frac{h}{h_{t,r}} \leq 1 \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}(t)$$

Hieraus folgt durch Logarithmieren und mit der Jensen-Ungleichung für $x > 0 \rightarrow \ln(x)$:

$$\int dp_{t,r} \ln\left(\frac{h}{h_{t,r}}\right) \leq 0 \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}(t)$$

und somit:

$$\int dp_{t,r} \ln(h_{t,r}^{-1}) = \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp_{t,r} \ln(h^{-1}) \quad (1)$$

Es gilt dann aber mit Ungleichung (6) des Beweises von Lemma 1.7 für alle $t > 0$, $r > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} H_t(r) &\leq \int dp_{t,r} \ln(h_{t,r}^{-1}) = \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp_{t,r} \ln(h^{-1}) \leq \\ &\sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) \leq \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) \end{aligned}$$

das heißt: es gelten die Behauptungen (i) und (iii) wegen Lemma 1.7 (i).

Wegen der Beschränktheit der Verlustfunktionen gilt für alle $h \in \mathcal{H}(t)$: $e^{-t\|h\|} \leq h \leq 1$ p-f.ü., woraus

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int dp \left| \frac{h^{-r}}{\int dp h^{-r}} - 1 \right| = 0 \quad \text{gleichmäßig für } h \in \mathcal{H}(t)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int dp_{t,r} \ln(h^{-1}) = \int dp \ln(h^{-1}) \quad \text{gleichmäßig für } h \in \mathcal{H}(t)$$

und somit unter Berücksichtigung von (1) die Behauptung (ii) folgt.

1.9 Lemma

Für jedes $t \geq 0$, $r_0 > 0$ gilt:

- (i) $\lim_{r \rightarrow r_0} \|h_{t,r} - h_{t,r_0}\| := \int dp |h_{t,r} - h_{t,r_0}| = 0$
- (ii) $\lim_{r \rightarrow r_0} \|p_{t,r} - p_{t,r_0}\| := \int dp \left| \frac{dp_{t,r}}{dp} - \frac{dp_{t,r_0}}{dp} \right| = 0$

Beweis

Wir benötigen folgende Ungleichung von Pinsker, die besagt: (siehe J.H.B. Kempermann [5])

Seien q_i $i=1,2$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Meßraum $(\Omega, \mathcal{B})$, mit $q_2 \ll q_1$, so gilt für alle Wahrscheinlichkeitsmaße $\bar{q}$, mit $q_i \ll \bar{q}$ $i=1,2$;

$$\int d\bar{q} \left| \frac{dq_1}{d\bar{q}} - \frac{dq_2}{d\bar{q}} \right| \leq \left(2 \int dq_2 \ln \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Wir wenden diese Ungleichung auf die Wahrscheinlichkeitsmaße $p_{t,r}$, p_{t,r_0} an, und erhalten:

$$\begin{aligned} \|p_{t,r} - p_{t,r_0}\|^2 &\leq 2 \int dp_{t,r} \ln \left(\frac{dp_{t,r}}{dp_{t,r_0}} \right) = 2 \ln \left(\int dp (h_{t,r_0})^{-r_0} \right) - \\ &2 \ln \left(\int dp h_{t,r}^{-r} \right) + 2 \int dp_{t,r} \ln \left(\left(\frac{h_{t,r_0}}{h_{t,r}} \right)^r (h_{t,r_0})^{r_0-r} \right) \leq \\ &2 \left((r_0 - r) \int dp_{t,r} \ln(h_{t,r_0}) + H_t(r_0) - H_t(r) \right) \quad (\text{wegen Lemma 1.3}) \end{aligned}$$

Daraus folgt dann wegen der Stetigkeit von $r \geq 0 \rightarrow H_t(r)$ (Lemma 1.5) und wegen $e^{-t|K|} \leq h \leq 1$ p-f.ü. für alle $h \in \mathcal{H}(t)$, die Behauptung (ii).

Die Behauptung (i) erhalten wir wie folgt aus (ii):

$$\|h_{tr} - h_{tr_0}\| = \int dp \left| \frac{h_{tr}^{-r}}{\int dp h_{tr}^{-r}} - \frac{h_{tr}^{-r} - h_{tr}^{-r} + h_{tr_0}^{-r_0}}{\int dp h_{tr_0}^{-r_0}} \right| \geq$$

$$\int dp \left| \frac{h_{tr}^{-r} - h_{tr_0}^{-r_0}}{e^{H_t(r_0)}} \right| = \int dp h_{tr}^{-r} |e^{-H_t(r_0)} - e^{-H_t(r)}|$$

die Gültigkeit von:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \int dp |h_{tr}^{-r} - h_{tr_0}^{-r_0}| = 0 \quad \text{und damit:}$$

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow r_0} \int dp |h_{tr}^{-r_0} - h_{tr_0}^{-r_0}| \leq \lim_{r \rightarrow r_0} \int dp |h_{tr}^{-r} - h_{tr_0}^{-r_0}| +$$

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \int dp |h_{tr}^{-r_0} - h_{tr}^{-r}| \leq 0 + \lim_{r \rightarrow r_0} \int dp e^{tr_0 \|x\|} |1 - h_{tr}^{-r+r_0}| = 0$$

Da nun wegen dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für alle $x, y \in [1, e^{tr_0 \|x\|}]$ gilt:

$$\left| x^{-\frac{1}{r_0}} - y^{-\frac{1}{r_0}} \right| \leq \frac{1}{r_0} |x - y| \quad \text{erhalten wir schließlich:}$$

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow r_0} \int dp |h_{tr} - h_{tr_0}| \leq \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{1}{r_0} \int dp |h_{tr}^{-r_0} - h_{tr_0}^{-r_0}| = 0$$

Das folgende letzte Lemma des Paragraphen beschreibt das Verhalten der Funktionenschar $(H_t)_{t \geq 0}$ und der sie erzeugenden Schar $(h_{tr})_{t \geq 0, r \geq 0}$ für gedächtnisfreie Quellen.

1.10 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p_y, \chi)_{y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle und für jedes $t \geq 0, r \geq 0, y \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, seien $H_t^y(r)$ und h_{tr}^y bezüglich der Quellen $(\Omega, \mathcal{B}, p_y, \chi)$, bzw. $H_t^{(n)}(r)$

und $h_{t,r}^{(n)}$ bezüglich der Quelle $(\Omega_{(n)}, \mathcal{B}_{(n)}, P_{(n)}, \mathcal{X}_{(n)})$, gemäß Definition 1.1 und 1.4 definiert, so gilt:

$$(i) \quad H_t^{(n)}(r) = \sum_{y=1}^n H_t^y(r)$$

$$(ii) \quad h_{t,r}^{(n)}(\omega_{(n)}) = \prod_{y=1}^n h_{t,r}^y(\omega_y) \quad \text{für } P_{(n)}\text{-fast alle } \omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$$

Beweis

Sei $t > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, und sei für jedes $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$

$$h_o(\omega_{(n)}) := \prod_{y=1}^n h_{t,r}^y(\omega_y), \quad \text{so gilt für alle } l_{(n)} \in \mathcal{X}_{(n)}$$

$$\int P_{(n)}(d\omega_{(n)}) h_o(\omega_{(n)})^{-r-1} e^{-tl_{(n)}(\omega_{(n)})} =$$

$$\prod_{y=1}^n \int P_y(d\omega_y) h_{t,r}^y(\omega_y)^{-r-1} e^{-tl_y(\omega_y)} \leq 1$$

(wegen der Definition der $h_{t,r}^y$ und Lemma 1.3)

und mit $\mathcal{X}^{(n)}(t) := \overline{\text{co}} \{e^{-tl_{(n)}} : l_{(n)} \in \mathcal{X}_{(n)}\}$ folgt weiter:

$$\int dP_{(n)} h_o^{-r-1} h^{(n)} \leq 1 \quad \text{für alle } h^{(n)} \in \mathcal{X}^{(n)}(t)$$

woraus wir mit Lemma 1.3 die Behauptung (ii) erhalten.

Die Behauptung (i) folgt dann sofort aus (ii) und den Definitionen 1.1 mit 1.4, wenn man berücksichtigt, daß $P_{(n)}$ eine Produktwahrscheinlichkeit ist.

§ 2 Die untere Abschätzung

Wir werden nun mit Hilfe der Lemmas des Paragraphen 1 den Ausdruck $P_{(n)}(D, R)$ im Hinblick auf das zu Beginn des Kapitels II geschilderte Problem nach unten abschätzen.

2.1 Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})_{n \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, $n \in \mathbb{N}$, und $L_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}$ ein Quellencode, mit $\frac{\ln(|L_{(n)}|)}{n} \leq R$, so gilt:

$$\frac{1}{n} \ln(p_{(n)}\{\omega_{(n)} : \bigwedge_{L_{(n)} \in L_{(n)}} l_{(n)}(\omega_{(n)}) > nD\}) >$$

$$\sup_{t \geq 0} \inf_{r \geq 0} \frac{1}{n} H_t^{(n)}(r) - rt(D + \frac{\sqrt{6}}{nt} \sqrt{\bar{H}_t^{(n)}(r)}) - r(R + \frac{\ln(4) + 1}{n}) - \frac{\ln(4) + 1}{n}$$

wobei:

$$\bar{H}_t^{(n)}(r) := \int dp_{t,r}^{(n)} (\ln(h_{t,r}^{(n)} - 1) - \bar{H}_t^{(n)}(r))^2$$

$$\bar{H}_t^{(n)}(r) := \int dp_{t,r}^{(n)} \ln(h_{t,r}^{(n)} - 1)$$

und $H_t^{(n)}(r)$, bzw. $h_{t,r}^{(n)}$, wie in Lemma 1.10 sind.

Beweis

Sei $t > 0$, $r > 0$, so gilt für alle $-\infty < S_2 \leq S_1 < \infty$:

$$P_{(n)}\{E\} := P_{(n)}\{\omega_{(n)} : \bigwedge_{L_{(n)} \in L_{(n)}} l_{(n)}(\omega_{(n)}) > nD\} \geq P_{(n)}\{E(S_1, S_2)\} := \quad (1)$$

$$P_{(n)}\{\omega \cap \{S_2 \leq \ln(h_{t,r}^{(n)} - 1) \leq S_1\}\} \geq \int dp_{(n)}(h_{t,r}^{(n)} e^{S_1})^{-r} 1_{E(S_1, S_2)}$$

vollkommen analog erhalten wir mit $dm_{t,r}^{(n)} := dp_{(n)} h_{t,r}^{(n)-r-1}$

$$m_{t,r}^{(n)}\{E\} \geq \int dm_{t,r}^{(n)} h_{t,r}^{(n)} e^{S_2 - 1} \{E \cap \{S_2 \leq \ln(h_{t,r}^{(n)} - 1) \leq S_1\}\} \quad (2)$$

Wir setzen nun $dp_{t,r}^{(n)} := dp_{(n)} h_{t,r}^{(n)-r} \exp(-\bar{H}_t^{(n)}(r))$; dies ist aufgrund der Definitionen von $h_{t,r}^{(n)}$ und $\bar{H}_t^{(n)}(r)$ ein

Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_{(n)}, \mathcal{B}_{(n)})$, und durch Umformen ergibt sich aus (1) und (2):

$$\exp(-\bar{H}_t^{(n)}(r) + rS_1) p_{(n)}\{E\} \geq p_{t,r}^{(n)}\{E \cap \{S_2 \leq \ln(h_{t,r}^{(n)} - 1) \leq S_1\}\} \quad (3)$$

$$\exp(-\bar{H}_t^{(n)}(r) - S_2) m_{t,r}^{(n)}\{E\} \geq p_{t,r}^{(n)}\{E \cap \{S_2 \leq \ln(h_{t,r}^{(n)} - 1) \leq S_1\}\} \quad (4)$$

Es sei nun $S_1 := \bar{H}_t^{(n)}(r) + \sqrt{2\bar{H}_t^{(n)}(r)}$, $S_2 := \bar{H}_t^{(n)}(r) - \sqrt{2\bar{H}_t^{(n)}(r)}$

so folgt durch Addition von (3) und (4) und mittels der Tschebyscheff-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \exp(-\bar{H}_t^{(n)}(r) + r(\bar{H}_t^{(n)}(r) + \sqrt{2\bar{H}_t^{(n)}(r)})) p_{(n)}\{E\} &+ \\ \exp(-\bar{H}_t^{(n)}(r) - \bar{H}_t^{(n)}(r) + \sqrt{2\bar{H}_t^{(n)}(r)}) m_{t,r}^{(n)}\{E\} &\geq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

Weiterhin gilt aber:

$$\begin{aligned} m_{t,r}^{(n)}\{E\} &= m_{t,r}^{(n)}\{\omega_{(n)} : \bigvee_{l_{(n)} \in I_{(n)}} e^{-tl_{(n)}(\omega_{(n)})} \geq e^{-tnD}\} \leq \\ \sum_{l_{(n)} \in I_{(n)}} \int dm_{t,r}^{(n)} e^{-tl_{(n)}} e^{tnD} &\leq \exp(\bar{H}_t^{(n)}(r) + tnD + nR) \end{aligned} \quad (6)$$

wobei die erste Ungleichung mittels eines elementaren Schubfachprinzips und gleichzeitiger Abschätzung des Supremums durch die Summe, und die zweite Ungleichung aus den Definitionen von $m_{t,r}^{(n)}$ und $h_{t,r}^{(n)}$, und aus Lemma 1.3 folgt.

Es sei $Y(t,r) := -\bar{H}_t^{(n)}(r) + \sqrt{2\bar{H}_t^{(n)}(r)} + ntD + nR + \frac{1}{r}$

so folgt aus (5) und (6), wobei wir die Abschätzung (5)

durch Addition von r , bzw. $\frac{1}{r}$, in den Exponenten leicht verschlechtert haben:

$$\exp(-H_t^{(n)}(r) - rY(t, r) + 2r\sqrt{2\bar{H}_t^{(n)}(r)} + nrtD + nrR + 1 + r) p_{(n)}\{E\} + \exp(Y(t, r)) \geq \frac{1}{2} \quad (7)$$

Wir betrachten nun bei festem $t > 0$ die Ungleichung (7) für alle $r > 0$ und unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: Es existiert ein $r_t > 0$, mit: $Y(t, r_t) = -\ln(4)$

Aus (7) folgt dann:

$$\begin{aligned} p_{(n)}\{E\} &\geq \frac{1}{4} \exp(H_t^{(n)}(r_t) - r_t \ln(4) - r_t \sqrt{8\bar{H}_t^{(n)}(r_t)} - nr_t D - nr_t R - 1 - r_t) \\ &\geq \exp(\inf_{r \geq 0} H_t^{(n)}(r) - nrt(D + \frac{1}{nt} \sqrt{8\bar{H}_t^{(n)}(r)}) - r(nR + \ln(4) + 1) \\ &\quad - \ln(4) - 1) \end{aligned}$$

2. Fall: Für alle $r > 0$ gilt $Y(t, r) > -\ln(4)$, so folgt:

$$\begin{aligned} &\exp(\inf_{r \geq 0} H_t^{(n)}(r) - nrt(D + \frac{1}{nt} \sqrt{8\bar{H}_t^{(n)}(r)}) - r(nR + \ln(4) + 1) - \ln(4) - 1) \\ &\leq \exp(\inf_{r \geq 0} H_t^{(n)}(r) - r\bar{H}_t^{(n)}(r) - r\sqrt{2\bar{H}_t^{(n)}(r)} - r - \ln(4)) \\ &\quad (\text{wegen } 0 \leq r(Y(t, r) + \ln(4)) \text{ für alle } r \geq 0) \leq \end{aligned}$$

$\exp(\inf_{r \geq 0} - r - \ln(4)) = 0$ (da $H_t^{(n)}(r) - r\bar{H}_t^{(n)}(r) \leq 0$ für alle $r \geq 0$, wie man aus Ungleichung (6) des Beweises von Lemma 1.7 sieht.)

Die beiden Fälle stellen aber schon alle Möglichkeiten dar; denn angenommen es gilt nicht der 2. Fall, so gibt es ein $r_t > 0$ mit $Y(t, r_t) \leq -\ln(4)$ und da die Funktion $r > 0 \rightarrow Y(t, r)$ wegen Lemma 1.9 stetig, und $\lim_{r \rightarrow 0} Y(t, r) = \infty$ ist, gibt es ein r_t mit $Y(t, r_t) = -\ln(4)$ und es gilt somit der 1. Fall.

Aus den beiden Fällen erhalten wir somit:

$$P_{(n)}\{E\} \geq \exp\left(\inf_{r \geq 0} H_t^{(n)}(r) - nrt\left(L + \frac{1}{nt}\sqrt{E_{H_t^{(n)}}(r)}\right) - n(nR + \ln(4) + 1) - \ln(4) - 1\right)$$

und damit die Behauptung, da $t > 0$ beliebig war und für $t=0$ die rechte Seite der obigen Ungleichung Null ist.

2.2 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, P, \mathcal{X})_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, so heißt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$E_{(n)}: [0, \infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow [-\infty, 0] \\ (D, R) \longrightarrow \sup_{t \geq 0} \inf_{r \geq 0} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR$$

Schwellenwertexponent der gedächtnisfreien Quelle zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Korollar

Mit den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt:

$$\frac{1}{n} \ln(P_{(n)}(D, R)) \geq \frac{1}{n} E_{(n)}\left(D + \sqrt{\frac{E}{n}} \|\mathcal{X}\|, R + \frac{1 + \ln(4)}{n}\right) - \frac{1 + \ln(4)}{n}$$

Beweis

Für alle $t > 0$, $r > 0$ gilt wegen Lemma 1.10 und da die

$P_{t, r}^{(n)}$ Produktwahrscheinlichkeiten sind:

$$\bar{H}_t^{(n)}(r) \leq \sum_{\nu=1}^n \int dP_{t, r}^{\nu} (\ln(h_{t, r}^{\nu})^{-1})^2 \leq n(t \|\mathcal{X}\|)^2 \quad (\text{Lemma 1.2 (i)})$$

und somit folgt die Behauptung aus Satz 2.1

§ 3 Die obere Abschätzung

Die allgemein üblichen Abschätzungsmethoden für die "Verteilungsschwänze von Minima einer festen Anzahl von Summen unabhängiger Zufallsvariablen auf Wahrscheinlichkeitsräumen mit Produktstruktur (nämlich Übergang vom Minimum zum geometrischen Mittel, und dann Scheubfachprinzip) lassen sich nicht auf den Fall von Minima einer mit der Produktstruktur exponentiell anwachsender Anzahl von Summen unabhängiger Zufallsvariablen übertragen.

Es scheint, als ob mit wachsender Anzahl von Zufallsvariablen das lokale Verhalten der Minima von immer größerer Bedeutung wird. Deswegen werden wir für geeignet konstruierte Teilmengen von Ω mittels Randomisierungsverfahren die Existenz "guter" Quellencodes für diese Teilmengen nachweisen, um dann Übergang zum Vereinigungscode einen "guten" Code für ganz Ω zu erhalten.

3.1 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})_{v \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, $D > 0$, $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $1 - e^{-nR} > e^{-1}$, $D - 4\sqrt{\frac{2}{n}} > 0$, $\bar{\Omega} \in \mathcal{B}_{(n)}$, und $(\lambda_v)_{v \in \mathbb{N}}$ ein n -Tupel endlicher Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{X}$:

Falls für alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$ ein $t(\omega_{(n)}) > 0$ existiert, mit:

$$(i) \quad |t(\omega_{(n)}) - t(\bar{\omega}_{(n)})| \leq n^{-3} \quad \text{für alle } \omega_{(n)}, \bar{\omega}_{(n)} \in \bar{\Omega}$$

$$(ii) \quad nD - \sqrt{2n} \|\mathbf{x}\| \leq \sum_{y=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} P_{\lambda_y}^{t(\omega_{(n)}), \omega_{(1)}} l(\omega_y) + \sqrt{2n} \|\mathbf{x}\| \leq nD$$

für alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$

so existiert ein Quellencode $I_{(n)}$, mit $\ln(|I_{(n)}|) \leq nR$ und

$$P_{(n)}\left\{\bar{\Omega} \cap \left\{\omega_{(n)} : \bigwedge_{l_{(n)} \in I_{(n)}} l_{(n)}(\omega_{(n)}) > nD\right\}\right\} \leq P_{(n)}\{\bar{\Omega}\} \exp\left(-\frac{1}{2} e^{\sqrt{n} - n^{-2} \|\mathbf{x}\|}\right) +$$

$$\exp\left(\inf_{0 \leq r} \sum_{y=1}^n \ln\left(\int_{\mathcal{L}} h_{\lambda_y}^r \right) - nr\bar{t}(D - \sqrt{\frac{2}{n}} \|\mathbf{x}\|) - nr\left(R - \sqrt{\frac{4}{n}}\right)\right)$$

wobei $\bar{t} := \inf\{t(\omega_{(n)}) : \omega_{(n)} \in \bar{\Omega}\}$ und h_{λ}^t bzw. $P_{\lambda}^{t, \omega}(1)$ wie in Kapitel I Definition 2.1, bzw. Lemma 2.10 ist.

Beweis

Es sei $N \in \mathbb{N}$, derart, daß $e^{nR} - 1 \leq N \leq e^{nR}$ und es bezeichne für alle $l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}$ $\lambda_{(n)}(l_{(n)}) := \prod_{y=1}^n \lambda_y(l_y)$ und

$$\bar{m}(I) := \sum_{l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}} \dots \sum_{l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}} \prod_{i=1}^N \lambda_{(n)}(l_{(n)}^i) \int_{P_{(n)}(d\omega_{(n)})} 1_{B(\omega_{(n)}, l_{(n)}^1, \dots, l_{(n)}^N)}$$

wobei $B := \left\{(\omega_{(n)}, l_{(n)}^1, \dots, l_{(n)}^N) : \bigwedge_{i=1}^N l_{(n)}^i(\omega_{(n)}) > nD\right\} \cap \bar{\Omega}$

Wir schätzen nun $\bar{m}(D)$ nach oben ab, und zwar gilt:

$$1_{B(\omega_{(n)}, l_{(n)}^1, \dots, l_{(n)}^N)} = \prod_{i=1}^N 1_{\{(\omega_{(n)}, l_{(n)}^i) : l_{(n)}^i(\omega_{(n)}) > nD\}} \cap \bar{\Omega}(\omega_{(n)}, l_{(n)}^i)$$

und somit:

$$\bar{m}(D) \leq \int_{\bar{\Omega}} P_{(n)}(d\omega_{(n)}) \left(\lambda_{(n)}\{l_{(n)} : l_{(n)}(\omega_{(n)}) > nD\}\right)^N \leq \quad (1)$$

$$\int_{\bar{\Omega}} P_{(n)}(d\omega_{(n)}) \exp(-N \lambda_{(n)}\{l_{(n)} : l_{(n)}(\omega_{(n)}) \leq nD\}) \quad (\ln(x) \leq x-1, x \in [0, 1])$$

Wegen der Voraussetzung (ii) gilt mit:

$$C_{\omega_{(n)}} := \left\{l_{(n)} : \left|\sum_{y=1}^n (l_y(\omega_y) - \sum_{l \in \mathcal{L}} P_{\lambda_y}^{t(\omega_{(n)}), \omega_{(1)}} l(\omega_y))\right| \leq \sqrt{2n} \|\mathbf{x}\|\right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \lambda_{(n)} \{ l_{(n)} : l_{(n)}(\omega_{(n)}) \leq nD \} \geq \\
 & \sum_{l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}} \prod_{\nu=1}^n P_{\lambda_{(n)}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}}(l_{\nu}) e^{t(\omega_{(n)}) l_{\nu}(\omega_{(n)})} (h_{\lambda_{(n)}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}})^{-1} C_{\omega_{(n)}}(l_{(n)}) \geq \\
 & \exp(-\ln(n_{\lambda_{(n)}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}}) + t(\omega_{(n)})(nD - 4\sqrt{2n}\|\mathbf{x}\|)) P_{\lambda_{(n)}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}} \{ C_{\omega_{(n)}} \} \geq \\
 & \frac{1}{2} \exp(-\sum_{\nu=1}^n \ln(h_{\lambda_{(n)}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}}) + \bar{t}(nD - 4\sqrt{2n}\|\mathbf{x}\|) - n^{-2}\|\mathbf{x}\|) \quad (2)
 \end{aligned}$$

(wegen der Tschebyscheffungleichung, der Beschränktheit der Verlustfunktionen durch $\|\mathbf{x}\|$ und der Voraussetzung (i))

Es bezeichne nun:

$$\begin{aligned}
 A &:= \{ \omega_{(n)} : -N \exp(-\sum_{\nu=1}^n \ln(h_{\lambda_{(n)}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}}) + \bar{t}(nD - 4\sqrt{2n}\|\mathbf{x}\|) \leq -e^{\sqrt{n}} \} \\
 & \text{so erhalten wir aus (1) und (2):} \\
 \bar{m}(D) &\leq \int_{\bar{\Omega}} p_{(n)}(d\omega_{(n)}) \exp(-\frac{1}{2} N \exp(-\sum_{\nu=1}^n \ln(h_{\lambda_{(n)}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}}) + \bar{t}(nD - 4\sqrt{2n}\|\mathbf{x}\|) \\
 & \quad - n^{-2}\|\mathbf{x}\|)) \leq \\
 & p_{(n)}(\bar{\Omega}) \exp(-\frac{1}{2} e^{\sqrt{n}} - n^{-2}\|\mathbf{x}\|) + P_{(n)}(A \cap \bar{\Omega}) \quad (3)
 \end{aligned}$$

und wegen:

$$P_{(n)}(A \cap \bar{\Omega}) \leq \inf_{r>0} n^{-r} \prod_{\nu=1}^n \int d p_{\nu}(h_{\lambda_{(n)}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}})^r e^{-r\bar{t}(nD - 4\sqrt{2n}\|\mathbf{x}\|) + r\sqrt{n}}$$

folgt, daß $\bar{m}(D)$ kleiner oder gleich der rechten Seite der behaupteten Ungleichung ist. Aufgrund der Definition von $\bar{m}(D)$ muß aber ein N -Tupel $[\hat{l}_{(n)}^i]_{1 \leq i \leq N}$ von

Elementen aus $\mathcal{L}_{(n)}$ existieren, mit:

$$P_{(n)} \{ \omega_{(n)} : \bigwedge_{i=1}^N \hat{l}_{(n)}^i(\omega_{(n)}) > nD \} \leq \bar{m}(D)$$

der Quellencode $l_{(n)} := \{ \hat{l}_{(n)}^i : 1 \leq i \leq N \}$ erfüllt dann die Behauptung.

Wir werden nun in den folgenden Lemmas Teilmengen von $\Omega_{(n)}$ und geeignete Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{L}_{(n)}$

konstruieren, die sowohl die Voraussetzungen des Lemmas 3.1 erfüllen, als auch die dort angegebene Ungleichung optimieren.

Wie bei der oberen Schranke für den mittleren Verlust werden wir ohne eine Zusatzbedingung an die Quelle nicht auskommen, die aber einschränkender ist, als (Bed 1) von Kapitel I.

3.2 Definition

Eine gedächtnisfreie Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, P, \mathcal{X})_{\nu \in \mathbb{N}}$ genügt der Bedingung (Bed 2), falls gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X} \\ |\mathcal{L}| \leq k}} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(\bar{p})} \int d\bar{p} \bigwedge_{l \in \mathcal{L}} 1 = 0 \quad \text{gleichmäßig in } \nu \in \mathbb{N}$$

Bemerkung

Die in der Bemerkung zu Bedingung (Bed 1), S. 24, aufgeführten Quellen erfüllen auch die Bedingung (Bed 2).

3.3 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})$ eine Quelle, so gilt für alle $t, t' > 0$, $r, r' > 0$, und $\lambda \in \Delta(\mathcal{X})$:

- (i) $|\ln(dp(h_\lambda^t)^x) - \ln(dp(h_\lambda^{t'})^x)| \leq |t - t'| r \|\mathcal{X}\|$
- (ii) $|H_t(r) - H_{t'}(r)| \leq |t - t'| r \|\mathcal{X}\|$
- (iii) $|\ln(dp(h_\lambda^t)^x) - \ln(dp(h_\lambda^t)^{r'})| \leq |r - r'| t \|\mathcal{X}\|$
- (iv) $|I_t(r) - H_t(r')| \leq |r - r'| t \|\mathcal{X}\|$
- (v) $\lambda \in \Delta(\mathcal{X}) \longrightarrow \int dp(h_\lambda^t)^x$ ist eine konvexe Funktion

Beweis

(i) Sei o.b.d.A. $t' \leq t$, so ist für alle $r \geq 0$, $\lambda \in \Lambda(\mathcal{X})$

$$\left| \ln(\int dp(h_\lambda^t)^r) - \ln(\int dp(h_\lambda^{t'})^r) \right| = \ln(\int dp(\sum_{1 \in \mathcal{X}} \lambda(1) e^{-t1})^{-r} - \ln(\int dp(\sum_{1 \in \mathcal{X}} \lambda(1) e^{-t'1 + (t-t')1})^{-r}) \leq |t-t'| r \|\mathcal{X}\|$$

und somit folgen (i) und (ii) (letzteres wegen Lemma 1.2)

(iii) Sei o.b.d.A. $r' \leq r$, so ist für alle $t \geq 0$, $\lambda \in \Lambda(\mathcal{X})$

$$\left| \ln(\int dp(h_\lambda^t)^r) - \ln(\int dp(h_\lambda^t)^{r'}) \right| = \ln(\int dp(\sum_{1 \in \mathcal{X}} \lambda(1) e^{-t1})^{-r} - \ln(\int dp(\sum_{1 \in \mathcal{X}} \lambda(1) e^{-t1})^{-r + (r-r')}) \leq |r-r'| t \|\mathcal{X}\|$$

und somit folgen wie oben (iii) und (iv)

(v) Die Behauptung folgt direkt aus der Definition von h_λ^t und der Konvexität von $x \geq 0 \longrightarrow x^{-r}$

Das folgende Lemma liefert "geglättete", fast - optimale Parameter des in der unteren Abschätzung des Paragraphen 2 auftretenden Exponenten.

3.4 Lemma

Seien $(\Omega, \mathcal{B}, P_\nu, \mathcal{X})_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, die der Bedingung (Bed 2) genügt, $\bar{D} > 0$, $\bar{R} > 0$, und $\bar{r} > 0$, so existieren für jedes $n \in \mathbb{N}$, $D \geq \frac{\bar{D}}{2}$, $R \geq \frac{\bar{R}}{2}$, und $1 \leq \nu \leq n$ Abbildungen $t \geq 0 \longrightarrow \lambda_{t,\nu} \in \Lambda(\mathcal{X})$ mit den Eigenschaften:

(i) Für alle $t, \bar{t} \geq 0$ mit $|t - \bar{t}| \leq n^{-3}$ und alle $1 \leq \nu \leq n$ gilt: $\|\lambda_{t,\nu} - \lambda_{\bar{t},\nu}\| := \sup_{1 \in \mathcal{X}} |\lambda_{t,\nu}(1) - \lambda_{\bar{t},\nu}(1)| \leq \frac{2}{n}$

(ii) Sei $K_{\bar{D}}$ die kleinste natürliche Zahl K mit:

$$\sup_{v \in \mathbb{N}} \inf_{\mathcal{Z} \in \mathcal{K}, |\mathcal{Z}| \leq K} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{K}(\bar{p}_v)} \int d\bar{p} \bigwedge_{l \in \mathcal{Z}} 1 \leq \frac{\bar{r}}{8} \quad (\text{wegen (Bed 2)})$$

ist $K_{\bar{D}}$ wohl definiert) und $T_{\bar{D}} := 1 + 8(\bar{D})^{-1} \cdot \ln(K_{\bar{D}})$,

so gilt für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$ und für $t \geq T_{\bar{D}} + 3$

$$\sum_{v=1}^n \sum_{l \in \mathcal{Z}} P_{\lambda_{t,v}}^{t, \omega_v}(1) 1(\omega_v) \leq n \frac{D}{2}$$

(iii) Für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} \sum_{v=1}^n \ln \left(\int d p_v (h_{\lambda_{t,v}}^t)^r \right) - n r t D - n r R - 1$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - n r t D - n r R + \bar{r} (\|\mathcal{K}\| (4(T_{\bar{D}} + 3) + \frac{2}{n}) + D + \|\mathcal{K}\|)$$

Beweis

Gemäß (Bed 2) existiert eine Folge $(\mathcal{Z}_v)_{v \in \mathbb{N}}$ endlicher Teilmengen von $\mathcal{Z}$, so daß für alle $v \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{\bar{p} \in \mathcal{K}(\bar{p}_v)} \int d\bar{p} \bigwedge_{l \in \mathcal{Z}_v} 1 \leq \frac{\bar{D}}{8}, \quad \text{und} \quad |\mathcal{Z}_v| \leq K_{\bar{D}} \quad (1)$$

Es sei für alle $v \in \mathbb{N}$ $\lambda_v \in \Lambda(\mathcal{K})$ definiert, durch:

$$\lambda_v(1) := \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{Z}_v|} & \text{falls } l \in \mathcal{Z}_v \\ 0 & \text{falls } l \notin \mathcal{Z}_v, l \in \mathcal{Z} \end{cases} \quad (2)$$

Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $\bar{t}_k := \frac{k}{n}$ und für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $\bar{t}_k \leq T_{\bar{D}}$ sei $0 \leq r_k \leq \bar{r}$ derart, daß:

$$H_{\bar{t}_k}^{(n)}(r_k) - n r_k \bar{t}_k D - n r_k R = \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_{\bar{t}_k}^{(n)}(r) - n r \bar{t}_k D - n r R \quad (3)$$

(solch ein r_k existiert stets wegen Lemma 1.5)

Weiter sei für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mit $\bar{t}_k > T_{\bar{D}}$, $r_k := \bar{r}$, so ist zu bemerken, daß für alle $t \geq T_{\bar{D}}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - n\bar{r}R &\leq \sum_{\nu=1}^n \ln \left(\int dp_{\nu} \left(\sum_{l \in \mathcal{L}_{\nu}} \lambda_{\nu}(l) e^{-tl} \right)^{-\bar{r}} \right) - n\bar{r}tD - \\
 n\bar{r}R &\quad (\text{wegen Lemma 1.10 und 1.2 (iii)}) \leq \bar{r} \left(\sum_{\nu=1}^n \ln(l_{\nu}) \right) + \\
 \sum_{\nu=1}^n \ln \left(\int dp \left(\bigvee_{l \in \mathcal{L}_{\nu}} e^{-tl} \right)^{-\bar{r}} \right) - n\bar{r}tD - n\bar{r}R &\quad (\text{Abschätzung der Summe durch das Supremum}) \leq n\bar{r}t \left(\frac{\ln(K_{\bar{r}})}{t} D - \frac{3}{8} D \right) - n\bar{r}R \\
 (\text{wegen (1) und } D \geq \frac{\bar{D}}{2}) &\leq -n\bar{r}R \quad (\text{wegen } t \geq T_{\bar{D}}) \leq \\
 \sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR &\quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\text{Es ist nun } t \mapsto \frac{1}{2n} \longrightarrow \tilde{r}_t := \sum_{k=0}^{\infty} r_k \mathbb{1}_{[t_k - \frac{1}{2n}, t_k + \frac{1}{2n})}(t)$$

eine Treppenfunktion und es ist somit wohl definiert:

$$r(t) := n \int_{t - \frac{1}{2n}}^{t + \frac{1}{2n}} d\tilde{r} \, r_{\tilde{r}} \quad \text{für } t \geq 0, \text{ und die Funktion}$$

$t \geq 0 \longrightarrow r(t)$ hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
 &\text{Für alle } t, \bar{t} \geq 0 \text{ mit } \frac{1}{n} \geq |\bar{t} - t| \geq 0 \text{ gilt:} \\
 |r(\bar{t}) - r(t)| &\leq 2n\bar{r} |\bar{t} - t| \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und alle } t \geq T_{\bar{D}} + 1 \text{ gilt:} \\
 r(t_k) = r_k \quad \text{und} \quad r(t) = \bar{r} \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Für alle } t \geq 0 \text{ gilt:} \\
 H_t^{(n)}(r(t)) - nr(t)tD - nr(t)R &\leq \\
 \sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR &+ \bar{r}(\|\mathcal{L}\| + D) \quad (7)
 \end{aligned}$$

Die Behauptung (6) erhalten wir sofort aus der Definition von $r(t)$ und Behauptung (5) ergibt sich aus:

$$|r(\bar{t}) - r(t)| = n \left| \int_{t - \frac{1}{2n}}^{\bar{t} - \frac{1}{2n}} d\tilde{r} \, r_{\tilde{r}} - \int_{t + \frac{1}{2n}}^{\bar{t} + \frac{1}{2n}} d\tilde{r} \, r_{\tilde{r}} \right| \leq 2n\bar{r} |\bar{t} - t|$$

Behauptung (7) sieht man wie folgt:

Sei $t \geq 0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, derart, daß $t \in [t_{k-1}, t_k]$

und mittels (6) sieht man leicht, daß es ein $\alpha \in [0, 1]$ geben muß, sodaß gilt: $r(t) = \alpha r_{k-1} + (1-\alpha)r_k$; und mit Lemma 1.5 erhalten wir: $H_t^{(n)}(r(t)) - nr(t)D - nr(t)R \leq$
 $\alpha (H_t^{(n)}(r_{k-1}) - nr_{k-1}D - nr_{k-1}R) + (1-\alpha)(H_t^{(n)}(r_k) - nr_kD - nr_kR) \leq$
 $\alpha (H_{t_{k-1}}^{(n)}(r_{k-1}) - nr_{k-1}t_{k-1}D - nr_{k-1}R) + (1-\alpha)(H_{t_k}^{(n)}(r_k) - nr_kt_kD - nr_kR) + \bar{r}(\|x\|+D)$
(wegen Lemma 3.3 (ii)) $\leq$
 $\sup_{0 \leq t \leq T_D} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR + \bar{r}(\|x\|+D)$ (wegen der Definition der r_k und (4) mit (6))

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage die Existenz der gewünschten Abbildungen zu zeigen. Es sei für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $t_k := kn^{-2}$, so wählen wir für jedes $1 \leq n$ und jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $t_k \leq T_D + 2$ ein Element $\bar{\lambda}_{k,n}$ aus $\{\lambda \in \Delta(x) : \ln(\int d\rho_y(n_k^{t_k})^{r(t_k)}) \leq H_{t_k}^{(n)}(r(t_k)) + \frac{1}{n}\}$ (wegen Lemma 1.2 (iii) sind diese Mengen nicht leer), und für jedes $1 \leq n$, jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $t_k > T_D + 2$ sei $\bar{\lambda}_{k,n} := \bar{\lambda}_y$. Mit $\tilde{\lambda}_{t,n} := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\lambda}_{k,n} 1_{[t_k - \frac{1}{2}n^{-2}, t_k + \frac{1}{2}n^{-2}]}(t)$, für $t \geq -\frac{1}{2}n^{-2}$, $1 \leq n$, ist für $t \geq 0$ und $1 \leq n$
 $\lambda_{t,n} := n^2 \int_{t - \frac{1}{2}n^{-2}}^{t + \frac{1}{2}n^{-2}} dt \tilde{\lambda}_{t,n}$ ein Element von $\Delta(x)$.

Wir zeigen nun, daß die Abbildungen $t \geq 0 \rightarrow \lambda_{t,n}$ die Eigenschaften (i) bis (iii) besitzen. Zunächst folgt direkt aus der Definition von $\lambda_{t,n}$ daß: (8)
 $\lambda_{t,n} = \bar{\lambda}_{k,n}$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda_{t,n} = \bar{\lambda}_y$ für alle $t \geq T_D + 3$
und Eigenschaft (i) zeigt man ganz analog zu (5). Eigenschaft (ii) erhalten wir aus folgender Unglei-

chungskette:

Für p_n -fast alle $\omega_n \in \Omega_n$ und alle $t \geq T_D + 3$ gilt:

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} P_{\lambda_{t,\nu}}^{t, \omega_\nu}(1) l(\omega_\nu) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} P_{\lambda_{t,\nu}}^{t, \omega_\nu}(1) \frac{1}{t} \ln(e^{tl(\omega_\nu)}) \leq \frac{1}{t} \left(\sum_{\nu=1}^n \ln(h_{\lambda_{t,\nu}}^t(\omega_\nu)) \right) \quad (\text{wegen der Definition der } P_{\lambda_{t,\nu}}^{t, \omega_\nu}(1))$$

und der Jensen-Ungleichung für $x > 0 \rightarrow \ln(x)$) =

$$\frac{1}{t} \left(\sum_{\nu=1}^n \ln \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \bar{\lambda}_j(1) e^{-tl(\omega_\nu)} \right)^{-1} \right) \quad (\text{wegen (8)}) \leq$$

$$\frac{n}{t} \ln(K_D) + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{t} \ln \left(\bigvee_{l \in \mathcal{L}_\nu} e^{-tl(\omega_\nu)} \right)^{-1} \quad (\text{wegen (1) und der}$$

Abschätzung der Summe durch das Supremum) $\leq$

$$\frac{n}{t} \ln(K_D) + \frac{D}{8} n \leq \frac{D}{4} n \leq \frac{D}{2} n \quad (\text{wegen (1), } t \geq T_D + 3, \text{ und } D \geq \frac{D}{2})$$

Es bleibt nun noch die Eigenschaft (iii) zu zeigen.

Sei $t \geq 0$ so gibt es ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, derart, daß $t \in [t_k, t_{k+1}]$

und man sieht leicht aus (8) und der Definition der

$\lambda_{t,\nu}$, daß ein $\alpha \in [0, 1]$ existiert, mit $\lambda_{t,\nu} = \alpha \bar{\lambda}_{k,\nu} + (1-\alpha) \bar{\lambda}_{k+1,\nu}$

Mit Lemma 3.3 (i), (iii), (v) und (5) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \ln(\int d p_\nu(h_{\lambda_{t,\nu}}^t)^{r(t)}) &\leq \sum_{\nu=1}^n \ln(\int d p_\nu(\alpha(h_{\bar{\lambda}_{k,\nu}}^t)^{r(t)} + (1-\alpha)(h_{\bar{\lambda}_{k+1,\nu}}^t)^{r(t)})) \\ &\leq \sum_{\nu=1}^n \ln(\alpha \int d p_\nu(h_{\bar{\lambda}_{k,\nu}}^t)^{r(t)} + (1-\alpha) \int d p_\nu(h_{\bar{\lambda}_{k+1,\nu}}^t)^{r(t)} + \\ &\quad \bar{r} \mathbb{E}((2t + \frac{1}{n})) \end{aligned} \quad (9)$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

1. Fall: $T_D + 2 \geq t_{k+1}$ so folgt aufgrund der Definition von $\bar{\lambda}_{k,\nu}$ und $\bar{\lambda}_{k+1,\nu}$ und mit (9) :

$$\sum_{\nu=1}^n \ln(\int d p_\nu(h_{\lambda_{t,\nu}}^t)^{r(t)}) - nr(t)tD - nr(t)R \leq$$

$$\sum_{v=1}^n \ln(\alpha \exp(H_{t_k}^v(r(t_k)) + \frac{1}{n}) + (1-\alpha) \exp(H_{t_{k+1}}^v(r(t_{k+1})) + \frac{1}{n})) \\ - nr(t)D - nr(t)R + \bar{r} \| \mathbf{A} \| (2t + \frac{1}{n}) \leq$$

$$\sum_{v=1}^n H_{t_k}^v(r(t)) - nr(t)D - nr(t)R + \bar{r} \| \mathbf{A} \| (4(T_{\bar{D}}+2) + \frac{2}{n}) + 1$$

$$(\text{wegen Lemma 3.3 (ii), (iv), (5), und } t_k \leq t \leq t_{k+1} \leq T_{\bar{D}}+2) \leq$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nr(t)D - nrR + \bar{r} \| \mathbf{A} \| (4(T_{\bar{D}}+2) + \frac{2}{n}) + \bar{r} (\| \mathbf{A} \| + D) + 1$$

$$(\text{wegen Lemma 1.10 und (7)})$$

2. Fall: $t_{k+1} > T_{\bar{D}}+2 \geq t_k$ (und damit $t_k > T_{\bar{D}}+1$, also $r(t_k) = r(t) = r(t_{k+1}) = \bar{r}$ wegen (6)) so erhalten wir aufgrund der

Definition von $\bar{\lambda}_{t,v}$ und $\bar{\lambda}_{k+1,v}$ und mit (9):

$$\sum_{v=1}^n \ln(\int dp_v(h_{\lambda_{t,v}}^t)^{r(t)}) - nr(t)D - nr(t)R \leq$$

$$\sum_{v=1}^n \ln(\alpha \exp(H_{t_k}^v(\bar{r}) + \frac{1}{n}) + (1-\alpha) \int dp_v(h_{\bar{\lambda}_{k+1,v}}^{t_{k+1}})^{\bar{r}}) - n\bar{r}tD \\ - n\bar{r}R + \bar{r} \| \mathbf{A} \| (2t + \frac{1}{n}) \leq$$

$$\sum_{v=1}^n \ln(\int dp_v(h_{\bar{\lambda}_{k,v}}^{t_k})^{\bar{r}}) - n\bar{r}tD - n\bar{r}R + \bar{r} \| \mathbf{A} \| (2(T_{\bar{D}}+3) + \frac{2}{n}) + 1$$

$$(\text{wegen } t \leq t_{k+1} \leq T_{\bar{D}}+3 \text{ und Lemma 3.3 (i), 1.2 (iii)}) \leq$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nr(t)D - nrR + \bar{r} \| \mathbf{A} \| (2(T_{\bar{D}}+3) + \frac{2}{n}) + 1$$

$$(\text{wegen } t \geq t_k > T_{\bar{D}}+1 \text{ und der Ungleichungskette (4)})$$

3. Fall: $t_k > T_{\bar{D}}+2$ so folgt wegen (6) und der Definition der $\lambda_{t,v}$, daß $r(t) = \bar{r}$ und $\lambda_{t,v} = \bar{\lambda}_v$ und damit

$$\sum_{v=1}^n \ln(\int dp_v(h_{\lambda_{t,v}}^t)^{r(t)}) - nr(t)D - nr(t)R \leq$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nr(t)D - nrR \quad (\text{wegen Ungleichungskette (4)})$$

Die Ergebnisse der 3 Fälle ergeben Eigenschaft (iii)

Das folgende Lemma hat nur rein beweistechnische Bedeutung.

3.5 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, P_y, \mathcal{L})_{y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, und sei für jedes $1 \leq y \leq n$ eine Funktion $t > 0 \rightarrow \lambda_{t,y} \in \Delta(\mathcal{L})$ gegeben, so gilt für alle $t > 0$, mit:

$$\sup_{1 \leq y \leq n} \|\lambda_{t,y} - \lambda_{t,y}\| := \sup_{1 \leq y \leq n} \sup_{1 \in \mathcal{L}} |\lambda_{t,y}(1) - \lambda_{t,y}(1)| \leq \frac{2}{n} :$$

$$\left| \sum_{y=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{L}} (P_{\lambda_{t,y}}^{t, \omega_y}(1) - P_{\lambda_{t,y}}^{t, \omega_y}(1)) l(\omega_y) \right| \leq 8n e^{t\|\mathcal{L}\|}$$

für alle $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$

Beweis:

Für reelle, nicht-negative Zahlen $(z_i)_{1 \leq i \leq 4}$, mit $z_2, z_4 > 0$ gilt stets:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} - \frac{z_3}{z_4} \right| \leq \left| \frac{z_1}{z_2} - \frac{z_3}{z_2} \right| + \left| \frac{z_3}{z_2} - \frac{z_3}{z_4} \right| = \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2} \right| + \frac{z_3}{z_2 z_4} |z_2 - z_4|$$

woraus mit der Beschränktheit der Verlustfunktionen durch $\|\mathcal{L}\|$ folgt:

$$\left| \sum_{y=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{L}} (P_{\lambda_{t,y}}^{t, \omega_y}(1) - P_{\lambda_{t,y}}^{t, \omega_y}(1)) l(\omega_y) \right| \leq$$

$$\sum_{y=1}^n \left| \frac{\sum_{1 \in \mathcal{L}} \lambda_{t,y}(1) e^{-tl(\omega_y)} l(\omega_y)}{\sum_{1 \in \mathcal{L}} \lambda_{t,y}(1) e^{-tl(\omega_y)}} - \frac{\sum_{1 \in \mathcal{L}} \lambda_{t,y}(1) e^{-tl(\omega_y)} l(\omega_y)}{\sum_{1 \in \mathcal{L}} \lambda_{t,y}(1) e^{-tl(\omega_y)}} \right| \leq$$

$$\sum_{y=1}^n \left(4 \frac{1}{n} \|\mathcal{L}\| e^{t\|\mathcal{L}\|} + \|\mathcal{L}\| e^{t\|\mathcal{L}\|} \frac{1}{n} \right) = 8 \|\mathcal{L}\| e^{t\|\mathcal{L}\|}$$

Wir sind nun in der Lage den zentralen Satz dieses Paragraphen, nämlich eine obere Schranke für $P_{(n)}(D, R)$, zu beweisen. Die Leitidee ist dabei folgende: wir werden zeigen, daß sich fast ganz $\Omega_{(n)}$ als eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ interpretieren läßt, so daß sich für die durch die Topologie von $\mathbb{R}$ induzierten Umgebungen in $\Omega_{(n)}$ mittels Lemma 3.1 "gute" (bezüglich der unteren Abschätzung) Quellencodes nachweisen lassen.

3.3 Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, P, \mathcal{L})_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, die der Bedingung (Bed 2) genügt, $\bar{D} > 0$, $\bar{R} > 0$, so gibt es ein $n(\bar{D}, \bar{R}) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $\bar{r} > 0$, $D \gg \bar{D}$, $R \gg \bar{R}$, und $n \gg n(\bar{D}, \bar{R})$ gilt:

$$P_{(n)}(D, R) \leq \exp\left(-\frac{1}{2} e^{\sqrt{n} - \|\mathcal{L}\| n^{-2}}\right) + \exp\left(-\frac{1}{4} e^{nR + \frac{1}{2}}\right) + \exp\left(\sup_{0 \leq t} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - n r t (D - s_1(n)) - n r (R - s_2(n)) + s_3(n, \bar{r})\right)$$

wobei:

$$s_1(n) := \sqrt{\frac{32}{n}} \|\mathcal{L}\|$$

$$s_2(n) := \frac{1}{n} \ln(n^3 (T_{\bar{D}} + 3) + 1) + \sqrt{\frac{4}{n}} + \frac{1}{n} \ln(2)$$

$$s_3(n, \bar{r}) := \bar{r} (\|\mathcal{L}\| (4 (T_{\bar{D}} + 3) + \frac{2}{n}) + \|\mathcal{L}\| + D - s_1(n)) + 1 + \ln(n^3 (T_{\bar{D}} + 3) + 1)$$

und $T_{\bar{D}}$ wie in Lemma 3.4 (ii)

Beweis:

Es sei $n(\bar{D}, \bar{R})$ die kleinste natürliche Zahl, derart, daß für alle $n \geq n(\bar{D}, \bar{R})$ gilt:

$$\ln(n^3(T_{\bar{D}}+3)+1) + \ln(2) \leq n \frac{\bar{R}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{32n} \|\mathbb{X}\| \leq n \frac{\bar{D}}{2} \quad (2)$$

$$8e^{(T_{\bar{D}}+3)\|\mathbb{X}\|} \leq \sqrt{2n} \quad (3)$$

$$1 - \exp(-n \frac{\bar{R}}{2}) \geq e^{-1} \quad (4)$$

Sei nun $n \geq n(\bar{D}, \bar{R})$, so gibt es gemäß Lemma 3.4 Abbildungen $t \geq 0 \rightarrow \lambda_{t,v} \in \Delta(\mathbb{X})$ ($1 \leq v \leq n$) mit:

$$t \geq 0, \bar{t} \geq 0 \text{ und } |t - \bar{t}| \leq n^{-3} \Rightarrow \sup_{1 \leq v \leq n} \|\lambda_{t,v} - \lambda_{\bar{t},v}\| \leq \frac{2}{n}, \quad (5)$$

für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$ und alle $t \geq T_{\bar{D}}+3$ gilt:

$$\sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq \lambda \leq t} P_{\lambda_{t,v}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}}(1) l(\omega_v) \leq \frac{1}{2} (nD - \sqrt{32n} \|\mathbb{X}\|), \quad (6)$$

und für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} \sum_{v=1}^n \ln \left(\int dp(h_{\lambda_{t,v}}^t)^r \right) - nrt(D - s_1(n)) - nr(R - s_2(n)) \leq$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} h_{\lambda_{t,v}}^{(n)}(r) - nrt(D - s_1(n)) - nr(R - s_2(n)) - \ln(n^3(T_{\bar{D}}+3)+1) + s_3(n, \bar{r}) \quad (7)$$

Wir gliedern nun den Beweis in vier Teile:

1. Teil: Zerlegung von $\Omega_{(n)}$

Sei $\Omega^0 := \{\omega_{(n)} : \sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq \lambda \leq t} \lambda_{0,v}(1) l(\omega_v) + \sqrt{2n} \|\mathbb{X}\| \leq nD\}$, so gibt es zu $p_{(n)}$ -fast jedem $\omega_{(n)} \in [\Omega^0$ ein $t(\omega_{(n)}) \in [0, T_{\bar{D}}+3[$ mit:

$$\sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq \lambda \leq t(\omega_{(n)})} P_{\lambda_{t(\omega_{(n)})}}^{\omega_{(n)}, \omega_{(n)}}(1) l(\omega_v) = nD - 2\sqrt{2n} \|\mathbb{X}\| \quad (8)$$

denn für jedes $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$ ist wegen Lemma 3.4 (i) und

der Definition der $F_{\lambda_{t,y}}^{t,y,\omega_y}$ $t > 0 \longrightarrow \sum_{y=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} F_{\lambda_{t,y}}^{t,y,\omega_y}(1) l(\omega_y)$
 eine stetige Funktion und da weiter wegen der Definition von Ω^0 für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in [\Omega^0]$ gilt:

$$\sum_{y=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} F_{\lambda_{0,y}}^{0,y,\omega_y}(1) l(\omega_y) = \sum_{y=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda_{0,y}(1) l(\omega_y) > nL - \sqrt{8n} \|x\|$$

erhalten wir wegen (6) die Aussage (8) aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. Sei dann $I(n) \in \mathbb{N}$ definiert durch: $n^3(T_{\overline{D}}+3) \leq I(n) < n^3(T_{\overline{D}}+3)+1$, so sei für jedes $1 \leq i \leq I(n)$ $\Omega^i := \{\omega_{(n)} \in [\Omega^0] : t(\omega_{(n)}) \in [(i-1)n^{-3}, in^{-3}] \}$ und wir bemerken, daß wegen (8) gilt:

$$\bigcup_{1 \leq i \leq I(n)} \Omega^i = [\Omega^0] \quad (\text{bis auf eine } p_{(n)}\text{-Nullmenge}) \quad (9)$$

2. Teil: "Guter" Quellencode für Ω^0

Sei $N \in \mathbb{N}$ definiert durch: $\frac{1}{2} e^{nR} - 1 \leq N < \frac{1}{2} e^{nR}$,
 und sei für alle $l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}$ $\lambda_{(n)}(l_{(n)}) := \prod_{y=1}^n \lambda_{0,y}(l_y)$, so gilt analog zur Herleitung von (1) des Beweises von Lemma 3.1:

$$\sum_{l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}} \dots \sum_{l_{(n)} \in \mathcal{L}_{(n)}} \prod_{i=1}^N \lambda_{(n)}(l_{(n)}^i) p_{(n)}\left\{\omega_{(n)} : \bigwedge_{i=1}^N l_{(n)}^i(\omega_{(n)}) > nD\right\} \leq \quad (10)$$

$$\int_{\Omega^0} p_{(n)}(d\omega_{(n)}) \exp(-N \lambda_{(n)}\{l_{(n)} : l_{(n)}(\omega_{(n)}) \leq nD\})$$

Aus der Definition von Ω^0 folgt aber weiter:

$$\lambda_{(n)}\{l_{(n)} : l_{(n)}(\omega_{(n)}) \leq nD\} \geq \lambda_{(n)}\{l_{(n)} : \left| \sum_{y=1}^n (l_y(\omega_y) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda_{0,y}(l) l(\omega_y)) \right| \leq \sqrt{2n} \|x\|\} \\ \geq \frac{1}{2} \quad (\text{Tschebyscheff-Ungleichung}) \quad \text{für alle } \omega_{(n)} \in \Omega^0 \quad (11)$$

Aufgrund von (10) und (11) argumentiert man wie im Beweis von Lemma 3.1, daß ein Quellencode $\Gamma_{(n)}^0 = \mathcal{L}_{(n)}$ existieren muß, mit den Eigenschaften:

$$\ln(|I_n^0|) \leq nR - \ln(2) \quad \text{und} \\ P_n\left\{\bigwedge_{l(n) \in I_n^0} l(n) > nD\right\} \leq \exp(-N \frac{1}{2}) \leq \exp(-\frac{1}{4} e^{nR} + \frac{1}{2}) \quad (12)$$

3. Teil: "Gute" Quellencodes für Ω^i ($1 \leq i \in \mathbb{I}(n)$)

Sei nun $1 \leq i \in \mathbb{I}(n)$, so gilt mit $t_1 := (i-1)n^{-3}$ wegen Lemma 3.5, (8), (5) und (3) für P_n -fast alle $\omega_{(n)} \in \Omega^i$:

$$nD - \sqrt{8n} \|\omega\| \leq \sum_{v=1}^n \sum_{\lambda \in \Lambda_{t_1, v}} P_{\lambda(\omega_{(n)})}^{(\omega_{(n)})} l(\omega_{(n)}) + \sqrt{2n} \|\omega\| \leq nD \quad (13)$$

Es erfüllen dann $n, \Omega^i, (\lambda_{t_1, v})_{1 \leq v \leq n}, D$, und $R - s_2(n) + \frac{2}{\sqrt{n}}$ wegen (1), (2), (4), (5) und (13) mit der Definition von Ω^i die Voraussetzungen von Lemma 3.1, und wir erhalten hieraus die Existenz eines Quellencodes $I_{(n)}^i \subseteq \mathcal{X}_{(n)}$, mit:

$$\ln(|I_{(n)}^i|) \leq n(R - s_2(n) + \frac{2}{\sqrt{n}}) \quad \text{und} \\ P_n\left\{\Omega^i \cap \bigwedge_{l(n) \in I_{(n)}^i} l(n) > nD\right\} \leq P_n\{\Omega^i\} \exp(-\frac{1}{2} e^{\sqrt{n} - \frac{1}{2} n}) + \quad (14) \\ \exp(\inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} \sum_{v=1}^n \ln(\int dP_{\lambda_{t_1, v}}(h_{t_1}^r)) - nrt_1(D - s_1(n)) - nr(R - s_2(n)))$$

4. Teil: "Guter" Quellencode für $\Omega_{(n)}$

Es sei $I_{(n)} := \bigcup_{i=0}^{I(n)} I_{(n)}^i$, so folgt nach Kombinieren von (14) mit (7) aus (12), (9) und der Definition von $\mathbb{I}(n)$:

$$|I_{(n)}| \leq \sum_{i=0}^{I(n)} |I_{(n)}^i| \leq \frac{1}{2} e^{nR} + I(n) \exp(nR - ns_2(n) + 2\sqrt{n}) \leq e^{nR} \quad \text{und} \\ P_n\left\{\bigwedge_{l(n) \in I_{(n)}} l(n) > nD\right\} \leq \sum_{i=0}^{I(n)} P_n\left\{\bigwedge_{l(n) \in I_{(n)}^i} l(n) > nD\right\} \leq \\ \exp(\sup_{0 \leq t \leq \bar{T}_D} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrt(D - s_1(n)) - nr(R - s_2(n)) + s_3(n, \bar{r})) + \\ \exp(-\frac{1}{2} e^{\sqrt{n} - \frac{1}{2} n}) + \exp(-\frac{1}{4} e^{nR} + \frac{1}{2}),$$

und somit die Behauptung.

§ 4 Vergleich von oberer und unterer Abschätzung

Die Ergebnisse von Korollar 2.3 und Satz 3.6 sind zusammen betrachtet noch keine befriedigende Lösung des zu Beginn von Kapitel II gestellten Problems, da die Struktur der Exponenten der unteren und oberen Abschätzung zwar ähnlich, aber noch nicht gleich ist.

Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß für gedächtnisfreie Quellen, die einer zusätzlichen Regularitätsbedingung ((Bed 3)) genügen, dieser Mangel behoben werden kann.

4.1 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})_{\gamma \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, und seien $D \geq 0$, $R \geq 0$, $c \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, falls

$$E_{(n)}(D, R) \geq -nc$$

so gilt für alle $\bar{r} > 0$:

$$E_{(n)}(D, R) \leq \sup_{0 \leq t} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR \leq E_{(n)}(D, R - \frac{c}{\bar{r}})$$

Beweis:

Sei $\bar{r} > 0$, so folgt die erste Ungleichung aus Definition 2.2. Mit $A(n, \bar{r}) := \{t \geq 0: H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - n\bar{r}R \geq -nc\}$ erhalten wir für alle $t \in A(n, \bar{r})$:

$$\inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR \leq H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - n\bar{r}R \leq -nc \leq E_{(n)}(D, R)$$

und somit:

(1)

$$\sup_{0 \leq t} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR = \sup_{t \in A(n, \bar{r})} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR$$

Für alle $t \in A(n, \bar{r})$ und $r > \bar{r}$ gilt aber:

$$\begin{aligned} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nr(R - \frac{c}{r}) &= (H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - n\bar{r}(R - \frac{c}{\bar{r}})) = H_t^{(n)}(r) - H_t^{(n)}(\bar{r}) + \\ &+ (r - \bar{r})(-ntD - nr + \frac{c}{r}) > H_t^{(n)}(r) - H_t^{(n)}(\bar{r}) + (r - \bar{r})(-\frac{1}{r} H_t^{(n)}(\bar{r})) = \\ &r(\frac{1}{r} H_t^{(n)}(r) - \frac{1}{r} H_t^{(n)}(\bar{r})) > 0 \quad (\text{wegen Korollar 1.6}) \end{aligned}$$

und wir erhalten somit:

$$\sup_{t \in A(n, \bar{r})} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nr(R - \frac{c}{r}) = \sup_{t \in A(n, \bar{r})} \inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nr(R - \frac{c}{r}) \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt dann unter Beachtung von Definition 2.2 die Behauptung.

Die folgenden Definitionen werden uns in die Lage versetzen, eine hinreichende Bedingung für eine gedächtnisfreie Quelle anzugeben, so daß die Voraussetzungen von Lemma 4.1 erfüllt sind.

4.2 Definition (Bed 3)

Eine gedächtnisfreie Quelle $(\Omega, \mathcal{B}, P, \mathcal{X})$ genügt der Bedingung (Bed 3) falls für alle $t > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{N}} |\frac{1}{n} H_t^y(r) - \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{r}} H_t(\bar{r})| = 0$$

Bemerkungen:

(i) Wegen Lemma 1.7 und der Beschränktheit der Ver-

lustfunktionen ist $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_t^y(r) < \infty$ für alle $t \geq 0, y \in \mathbb{N}$.

(ii) Wegen (i) ist für jede stationäre gedächtnisfreie Quelle die Bedingung (Bed 3) erfüllt.

(iii) Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p_y, \mathcal{X})_{y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, derart, daß ein Wahrscheinlichkeitsmaß p_0 auf $(\Omega, \mathcal{B})$ existiert, mit: $p_y \in \mathcal{M}(p_0)$ und $\frac{dp_y}{dp_0} \geq z > 0$, p_0 -f.ü., $y \in \mathbb{N}$, so erfüllt diese Quelle (Bed 3).

Denn wegen $\mathcal{M}(p_y) = \mathcal{M}(p_0)$, Korollar 1.6, Lemma 1.7, folgt für alle $r > 0, t \geq 0, y \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{p \in \mathcal{M}(p_0)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) \geq \frac{1}{r} H_t^y(r) = \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \frac{1}{r} \ln \left(\int dp_y h^{-r} \right) \geq \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \frac{1}{r} \ln \left(\int dp_0 h^{-r} \right) + \frac{1}{r} \ln(z)$$

und wiederum mit Lemma 1.7 die Behauptung.

4.3 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p_y, \mathcal{X})_{y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, und sei $n \in \mathbb{N}$, so bezeichne für alle $D \geq 0$:

$$R_{p(n)}^*(nD) := \sup_{t \geq 0} \sum_{y=1}^n \sup_{p \in \mathcal{M}(p_y)} \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int dp_y \ln(h^{-1}) - ntD$$

$$D_{p(n)}^*(\max) := \sum_{y=1}^n \sup_{p \in \mathcal{M}(p_y)} \inf_{l \in \mathcal{X}} \int d\bar{p} l$$

Bemerkungen:

(i) $D \geq 0 \longrightarrow R_{p(n)}^*(nD)$ ist konvex. (Supremum linearer Funktionen)

(ii) $R_{p(n)}^*(nD) = 0$ für alle $D \geq \frac{1}{n} D_{p(n)}^*(\max)$

Dies erhält man aus folgender Ungleichungskette:

$$0 = \sum_{\nu=1}^n \sup_{\bar{p} \in \mathcal{A}(p_\nu)} \inf_{h \in \mathcal{H}(0)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) \leq R_{p(n)}^*(nD) \leq$$

$$\sup_{t \geq 0} \sum_{\nu=1}^n \sup_{\bar{p} \in \mathcal{A}(p_\nu)} \inf_{h \in \mathcal{H}} \int d\bar{p} \ln(e^{t\bar{1}}) - ntD = \sup_{t \geq 0} t(D_{p(n)}(\max) - nD)$$

(iii) $R_{p(n)}^*(nD) > 0$ für alle $D < \frac{1}{n} D_{p(n)}^*(\max)$

Denn mittels der Taylorentwicklung sieht man, daß $-\ln(\sum_{l \in \mathcal{X}} \lambda(l) e^{-t\bar{1}}(\omega)) \geq t(\sum_{l \in \mathcal{X}} \lambda(l) \bar{1}(\omega)) - \frac{t^2}{2} \|\bar{1}\|^2$ für alle $t \geq 0$, $\lambda \in \Delta(\mathcal{X})$, $\omega \in \Omega$, und mit $t_0 := \frac{1}{n\|\bar{1}\|^2} (D_{p(n)}(\max) - nD)$ folgt:

$$R_{p(n)}^*(nD) \geq \sum_{\nu=1}^n \sup_{\bar{p} \in \mathcal{A}(p)} \inf_{h \in \mathcal{H}(t_0)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) - nt_0 D =$$

$$\sum_{\nu=1}^n \sup_{\bar{p} \in \mathcal{A}(p)} \inf_{\lambda \in \Delta(\mathcal{X})} \int d\bar{p} \ln((\sum_{l \in \mathcal{X}} \lambda(l) e^{-t_0 \bar{1}})^{-1}) - nt_0 D \geq$$

$$t_0 (D_{p(n)}(\max) - n \frac{1}{2} t_0 \|\bar{1}\|^2 - nD) = \frac{1}{2} t_0 (D_{p(n)}(\max) - nD) > 0$$

wobei die erste Gleichheit analog zum Beweis von Lemma 1.2 (iii) gezeigt werden kann.

Allgemeine Übereinkunft: Für $a > b \in \mathbb{R}$, sei: $[a, b] = \emptyset$

4.4 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, die (Bed 2) und (Bed 3) genügt, sei $\delta > 0$, und $\underline{D} > \bar{D} > 0$, so gibt es ein $c(\delta, \underline{D}, \bar{D})$, derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$, und alle Tupel (D, R) , mit: $D \in [\bar{D}, \underline{D}]$ und $R \in]-\infty, \frac{1}{n} R_{p(n)}^*(nD) - \delta]$, gilt:

$$E_{(n)}(D, R) \geq -nc(\delta, \underline{D}, \bar{D})$$

Beweis:

Aus Lemma 3.3 (ii) folgt für alle $r > 0, t > 0, t' > 0$:

$$\sup_{v \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{r} H_t^v(r) - \frac{1}{r} H_{t'}^v(r) \right| \leq |t - t'| \|\mathbb{E}\| \quad (1)$$

und mit Korollar 1.6, Definition 4.2 Bemerkung (i):

$$\sup_{v \in \mathbb{N}} \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_t^v(r) - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_{t'}^v(r) \right| \leq |t - t'| \|\mathbb{E}\| \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir dann die Stetigkeit von

$t > 0 \longrightarrow \sup_{v \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{r} H_t^v(r) - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_t^v(r) \right| =: f_r(t)$ für alle $r > 0$. Die verallgemeinerte Folge $(f_r)_{r > 0}$ von Funktionen

konvergiert wegen (Bed 3) punktweise gegen Null und

wegen Korollar 1.6 gilt für alle $r > \tilde{r} > 0$: $f_r \leq f_{\tilde{r}}$.

Mit dem Satz von Dini folgt dann die Existenz eines

$r(\delta, \bar{D})$ derart, daß mit $T_{\bar{D}}$ wie in Lemma 3.4 (ii) gilt:

$$\sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} f_r(t) \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } r > r(\delta, \bar{D}) \quad (3)$$

Seien nun $K_{\bar{D}}$ wie in Lemma 3.4 und $(\mathcal{X}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ wie in

(1) des Beweises von Lemma 3.4, so gilt für alle $t > T_{\bar{D}}$

$$\sup_{\bar{p} \in \mathcal{A}(p_y)} \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int d\bar{p} \ln(n^{-1}) \leq \sup_{\bar{p} \in \mathcal{A}(p_y)} \int d\bar{p} -\ln\left(\frac{1}{|\mathcal{X}_t|} \sum_{l \in \mathcal{X}_t} e^{-t l}\right) \leq \ln(K_{\bar{D}}) + t \frac{\bar{D}}{8} \leq t \frac{\bar{D}}{4} \quad (\text{Abschätzung der Summe durch das})$$

Supremum und Anwendung der Definitionen von $K_{\bar{D}}$ und $(\mathcal{X}_t)$,

für alle $v \in \mathbb{N}$, und somit gilt wegen $R_{p(n)}^*(nD) > 0$ und $D > \bar{D}$:

$$R_{p(n)}^*(nD) = \sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \sum_{v=1}^n \sup_{\bar{p} \in \mathcal{A}(p_y)} \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \int d\bar{p} \ln(n^{-1}) - ntD$$

und mit Lemma 1.8 (iii), Lemma 1.7 (i) :

$$R_{p(n)}^*(nD) = \sup_{0 \leq t \leq T_{\bar{D}}} \sum_{v=1}^n \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_t^v(r) \right) - ntD \quad (4)$$

Wegen (2) folgt nun die Existenz eines $\tilde{t} \in [0, T_{\bar{D}}]$,

$$\text{mit: } R_{p(n)}^*(nD) = \sum_{v=1}^n \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} H_{\tilde{t}}^v(r) \right) - n\tilde{t}D \quad (5)$$

Wegen der Voraussetzung $R \leq \frac{1}{n} R_{P(n)}^*(nD) - \delta$, (3), (5),
und Korollar 1.6 erhalten wir:

$$-nR - n\bar{t}D \geq -R_{P(n)}(nD) + n\delta - n\bar{t}D = \sum_{\nu=1}^n \left(\lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{r} H_{\bar{t}}^{\nu}(r) \right) + n\delta \geq \sum_{\nu=1}^n -\frac{1}{r(\delta, \bar{D})} H_{\bar{t}}^{\nu}(r(\delta, \bar{D})) + n\frac{\delta}{2} \quad (6)$$

somit gilt dann für alle $r > r(\delta, \bar{D})$:

$$H_{\bar{t}}^{(n)}(r) - n\bar{t}D - n\bar{r}R = (H_{\bar{t}}^{(n)}(r(\delta, \bar{D})) - n\bar{r}(\delta, \bar{D})\bar{t}D - n\bar{r}(\delta, \bar{D})R) \\ \geq H_{\bar{t}}^{(n)}(r) - H_{\bar{t}}^{(n)}(r(\delta, \bar{D})) + (r - r(\delta, \bar{D})) \left(-\frac{1}{r(\delta, \bar{D})} H_{\bar{t}}^{(n)}(r(\delta, \bar{D})) \right)$$

(wegen (6) und Lemma 1.10)

$$= H_{\bar{t}}^{(n)}(r) - \frac{r}{r(\delta, \bar{D})} H_{\bar{t}}^{(n)}(r(\delta, \bar{D})) > 0 \quad (\text{wegen Korollar 1.6})$$

und wir erhalten mit $c(\delta, \underline{D}, \bar{D}) := r(\delta, \bar{D})(\ln(K_{\bar{D}}) + \bar{t}\bar{D})$:

$$E_{(n)}(\underline{D}, R) \geq \inf_{0 \leq r} H_{\bar{t}}^{(n)}(r) - n\bar{r}\bar{t}D - n\bar{r}R = \inf_{0 \leq r < r(\delta, \bar{D})} H_{\bar{t}}^{(n)}(r) - n\bar{r}\bar{t}D - n\bar{r}R \geq \\ \min\{0; -n\bar{r}(\delta, \bar{D})(\bar{t}D + R)\} > -n\bar{r}(\delta, \bar{D})(\bar{t}\bar{D} + n^{-1}R_{P(n)}^*(nD)) \geq \\ -nc(\delta, \underline{D}, \bar{D}) \quad (\text{denn aus den Ungleichungen zwischen (3) und (4) folgt: } R_{P(n)}^*(nD) \leq \sup_{0 \leq t} (n \ln(K_{\bar{D}}) + n\bar{t}\bar{D} - n\bar{t}D) = n \ln(K_{\bar{D}}))$$

das heißt, es gilt die Behauptung.

Wir sind nun in der Lage den bisherigen Stand der Lösung des zu Beginn des Kapitels II gestellten Problems anzugeben.

4.5 Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, p_y, \mathcal{X})_{y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, die den Bedingungen (Bed 2) und (Bed 3) genügt, und seien $\underline{D} > \bar{D} > 0$, $\bar{R} > 0$, $\delta > 0$, so gibt es ein $\bar{n} \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq \bar{n}$, $D \in [\bar{D}, \underline{D}]$, $R \in [\bar{R}, \frac{1}{n} R_{P(n)}^*(nD) - \delta]$ gilt:

$$(i) \quad \frac{1}{n} \ln(P_{(n)}(D, R)) \geq \frac{1}{n} E_{(n)}(D + \mathcal{G}_1(\frac{1}{\sqrt{n}}), R + \mathcal{G}_2(\frac{1}{\sqrt{n}})) - \mathcal{G}_2(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$(ii) \quad \frac{1}{n} \ln(P_{(n)}(D, R)) \leq \frac{1}{n} E_{(n)}(D - \mathcal{G}_1(\frac{1}{\sqrt{n}}), R - \mathcal{G}_2(\frac{1}{\sqrt{n}})) + \mathcal{G}_3(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

wobei:

$$\mathcal{G}_1(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \sqrt{\frac{8}{n}} \ln 4, \quad \mathcal{G}_2(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1 + \ln(4)}{n},$$

$$\mathcal{G}_1(\frac{1}{\sqrt{n}}) = s_1(n), \quad \mathcal{G}_2(\frac{1}{\sqrt{n}}) = s_2(n) + \frac{1}{\sqrt{n}} c(\delta, \underline{D}, \bar{D}),$$

$$\mathcal{G}_3(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{n} s_3(n) + \frac{1}{n} \ln(3)$$

mit s_1, s_2, s_3 wie in Satz 3.6, und $c(\delta, \underline{D}, \bar{D})$ wie in Lemma 4.4.

Beweis:

Sei $n(\bar{D}, \bar{R})$ wie in Satz 3.6, und sei $\bar{n}$ die kleinste natürliche Zahl größer oder gleich $n(\bar{D}, R)$ mit:

$$- \bar{n} c(\delta, \underline{D}, \bar{D}) \geq \max \left\{ -\frac{1}{2} e^{-\bar{n} \ln 4 \bar{n}^{-2}}; -\frac{1}{4} e^{n \bar{R}} + \frac{1}{2} \right\} \quad (1)$$

Sei nun $n \geq \bar{n}$, $D \in [\bar{D}, \underline{D}]$, $R \in [\bar{R}, \frac{1}{n} R_{P(n)}^*(nD) - \delta]$ so folgt die Behauptung (i) sofort aus Korollar 2.3.

Aufgrund von Definition 2.2 und Lemma 4.4 gilt:

$$E_{(n)}(D - s_1(n), R - s_2(n)) \geq E_{(n)}(D, R) \geq -n c(\delta, \underline{D}, \bar{D}) \quad (2)$$

und somit folgt aus Lemma 4.1:

$$\sup_{0 \leq t} \inf_{0 \leq r \leq \sqrt{n}} H_t^{(n)}(r) - n r t(D - s_1(n)) - n r(R - s_2(n)) \leq E_{(n)}(D - s_1(n), R - s_2(n) - \frac{1}{\sqrt{n}} c(\delta, \underline{D}, \bar{D})) \quad (3)$$

Wir setzen nun in Satz 3.6 speziell $\bar{r} = \sqrt{n}$ und erhalten durch diesen Satz mit (1), (2), (3) und der Definition 2.2 die Behauptung (ii).

Bemerkungen:

(i) Wir werden im nächsten Paragraphen zeigen, daß die Beschränkung des Ratenbereichs (für den Abschätzungen (i) und (ii) des Satzes 4.5 gelten) durch $R_{P(n)}^*$ nicht willkürlich ist, sondern dadurch auftritt, daß für Raten, die über $R_{P(n)}^*(nD)$ liegen, der D-Schwellenwertverlust eine andere Struktur besitzt.

(ii) Es ist nun nicht bekannt, ob auf einem gewissen Bereich der Ausdruck $E_{(n)}(D, R)$ bezüglich der Schwelle D und der Rate R stetig ist. Dies bedeutet: man weiß nicht, ob sich die Abschätzungen (i) und (ii) auf dem Schwellen-Ratenbereich des Satzes 4.5 bezüglich der Topologie der punktwweisen Konvergenz mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ beliebig annähern. Für eine andere Topologie, die wir in Definition 4.8 einführen werden, läßt sich so eine Annäherung nachweisen.

4.6 Korollar

Sei $(\Omega, \mathcal{Q}, P, \mathcal{X})_{\gamma \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, die (Bed 2) und (Bed 3) erfüllt, und seien $\underline{D} > \bar{D} > 0$, $\bar{R} > 0$, $\delta > 0$, so gibt es ein $\bar{n} \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > \bar{n}$, $D \in [\underline{D}, \bar{D}]$, $R \in [\bar{R}, \frac{1}{n} R_{P(n)}(nD) - \delta]$ gilt:

$$(i) \quad \frac{1}{n} \ln(P_{(n)}(D, R)) \geq \frac{1}{n} E_{(n)}(D, R + \mathcal{O}_1(\frac{1}{\sqrt{n}})) - \mathcal{O}_2(\frac{1}{n})$$

$$(ii) \quad \frac{1}{n} \ln(P_{(n)}(D, R)) \leq \frac{1}{n} E_{(n)}(D, R - \mathcal{O}_1(\frac{1}{\sqrt{n}})) + \mathcal{O}_2(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= T_{\bar{D}} \left(\mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{n}\right) \right), & \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{n}\right) &= \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{n}\right), \\ \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= T_{\bar{D}} \left(\bar{\mathcal{O}}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \bar{\mathcal{O}}_2\left(\frac{1}{\bar{n}}\right) \right), & \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= \bar{\mathcal{O}}_3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ mit} \\ \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \bar{\mathcal{O}}_1, \bar{\mathcal{O}}_2, \text{ und } \bar{\mathcal{O}}_3 &\text{ wie in Satz 4.5} \end{aligned}$$

Beweis:

Aufgrund der Definition von $T_{\bar{D}}$ und $K_{\bar{D}}$ (Lemma 3.4) gibt es eine Folge $(\mathcal{X}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ endlicher Teilmengen von $\mathcal{X}$, mit: $\sup_{j \in \mathbb{N}} |\mathcal{X}_j| \leq K_{\bar{D}}$, $\sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{p \in \mathcal{M}(P_j)} \int d\bar{p} \bigwedge_{l \in \mathcal{X}_j} 1 \leq \frac{\bar{D}}{8}$ (1)

Es gilt dann für alle $t \in T_{\bar{D}}$, $r \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$: (2)
 $H_t^{(n)}(r) \leq \sum_{j=1}^n \ln \left(\int d\bar{p} \left(\frac{1}{|\mathcal{X}_j|} \sum_{l \in \mathcal{X}_j} e^{-t l} \right)^{-r} \right) \leq n r t \left(\frac{\ln(K_{\bar{D}})}{t} + \frac{\bar{D}}{8} \right) \leq n r t \frac{\bar{D}}{4}$
 (Abschätzung der Summe durch das Supremum, (1) und Definition von $T_{\bar{D}}$)

Mit $\bar{n}, c(\mathcal{S}, \underline{D}, \bar{D})$ wie in Satz 4.5 definieren wir $\bar{n}$ als die kleinste natürliche Zahl größer gleich $\bar{n}$, mit: $\frac{2}{\sqrt{\bar{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} c(\mathcal{S}, \underline{D}, \bar{D}) \leq \frac{\bar{n}}{2}$ (3)

Sei nun $n \geq \bar{n}$ so gilt wegen (2) und $D \geq \bar{D}$, für $t \in T_{\bar{D}}$:
 $\inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - n r t (D + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)) - n r (R + \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{n}\right)) \leq \inf_{0 \leq r} n r t (-\frac{3}{4} \bar{D} - R)$
 $= -\infty$, und analog: $\inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - n r t D - n r (R + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)) = -\infty$
 und wir erhalten:

$$\begin{aligned} E_{(n)}(D + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), R + \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{n}\right)) &= \sup_{0 \leq t \in T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - n r t (D + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \\ n r (R + \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{n}\right)) &\geq \sup_{0 \leq t \in T_{\bar{D}}} \inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - n r t D - n r (R + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)) = \\ E_{(n)}(D, R + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)) \end{aligned}$$

und damit die Benaupung (i) aus Satz 4.5.

Wegen (3), der Definition von $\bar{n}$, und (1) mit (2) des Beweises von Satz 3.6 gilt: $R - \bar{\sigma}_2(\frac{1}{\sqrt{n}}) > 0$ und $D - \bar{\sigma}_1(\frac{1}{\sqrt{n}}) > \frac{\bar{r}}{2}$, weswegen mit (2) für alle $t \geq T_D$ folgt:

$$\inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - nrt(D - \bar{\sigma}_1(\frac{1}{\sqrt{n}})) - nr(R - \bar{\sigma}_2(\frac{1}{\sqrt{n}})) \leq \inf_{0 \leq r} nrt(-\frac{\bar{r}}{4}) = -\infty$$

Somit erhalten wir:

$$E_{(n)}(D - \bar{\sigma}_1(\frac{1}{\sqrt{n}}), R - \bar{\sigma}_2(\frac{1}{\sqrt{n}})) = \sup_{0 \leq t \leq T_D} \inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - nrt(D - \bar{\sigma}_1(\frac{1}{\sqrt{n}})) - nr(R - \bar{\sigma}_2(\frac{1}{\sqrt{n}})) \leq \sup_{0 \leq t \leq T_D} \inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nr(R - \bar{\sigma}_1(\frac{1}{\sqrt{n}})) \leq E_{(n)}(D, R - \bar{\sigma}_1(\frac{1}{\sqrt{n}})) \text{ und Behauptung (ii) aus Satz 4.5.}$$

4.7 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{X})_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, die der Bedingung (Bed 2) genügt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $D > 0$, $R \in \mathbb{R}$:

$$E_{(n)}(D, R) = \inf_{0 \leq r} \sup_{0 \leq t} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR$$

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $D > 0$, $R \in \mathbb{R}$, und seien K_D, T_D wie in Lemma 3.4 (ii) definiert, so gibt es wegen (Bed 2) eine Folge endlicher Teilmengen von $\mathcal{X}$, mit: $\sup_{\nu \in \mathbb{N}} |\mathcal{X}_\nu| \leq K_D$, und $\sup_{\nu \in \mathbb{N}} \sup_{p \in \mathcal{M}(p_\nu)} \int d\bar{p} \bigwedge_{1 \leq k, \nu} 1 \leq \frac{D}{8}$; und man zeigt wie (2) des Beweises von Korollar 4.6, daß für alle $t \geq T_D$ gilt:

$$H_t^{(n)}(r) \leq nrt \frac{D}{4} \quad \text{für alle } r \geq 0 \quad (1)$$

Da nun für alle $\bar{r} > 0$ $\inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_0^{(n)}(r) - nrOD - nrR = \min\{0; -n\bar{r}R\}$, und mit (1) $\inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR \leq \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} -nrt \frac{2}{4} D - nrR = \min\{0; -n\bar{r}R\}$, für alle $t \geq T_D$, erhalten wir:

$$\sup_{0 \leq t} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR = \sup_{0 \leq t \leq T_D} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR \quad (2)$$

für alle $\bar{r} > 0$

$$A(\bar{r}) := \{t \in [0, T_D]: \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR = H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - \bar{r}nR\}$$

$$B(\bar{r}, \epsilon) := \{t \in A(\bar{r}): H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - \bar{r}nR \geq E_{(n)}(D, R) + \epsilon\}$$

sind für jedes $\bar{r} > 0, \epsilon > 0$ wegen Lemma 3.3 (ii) abgeschlossene und somit kompakte Mengen. Weiterhin gilt für alle $\epsilon > 0, \bar{r} > \bar{r} > 0$: $B(\bar{r}, \epsilon) \subseteq B(\bar{r}, \epsilon)$; denn sei $t \in B(\bar{r}, \epsilon)$, so ist $t \in A(\bar{r})$ und wegen der Konvexität von $r \mapsto H_t^{(n)}(r)$ (Lemma 1.5) folgt auch $t \in A(\bar{r})$ und da $H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - \bar{r}nR \geq \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR = H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - \bar{r}nR \geq E_{(n)}(D, R) + \epsilon$, ist t auch Element von $B(\bar{r}, \epsilon)$.

Sei nun $\epsilon > 0$ fest gewählt, so betrachten wir die Familie $(B(\bar{r}, \epsilon))_{\bar{r} > 0}$; angenommen für alle $\bar{r} > 0$ gilt $B(\bar{r}, \epsilon) \neq \emptyset$, so folgt aus dem Cantorsche Durchschnittssatz, daß $\bigcap_{\bar{r} > 0} B(\bar{r}, \epsilon) \neq \emptyset$. Sei also $\bar{t} \in \bigcap_{\bar{r} > 0} B(\bar{r}, \epsilon)$, so ist notwendigerweise $\bar{t} \in A(\bar{r})$ für alle $\bar{r} > 0$ und es gilt somit: $\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} H_{\bar{t}}^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}\bar{t}D - \bar{r}nR = \inf_{0 \leq r} H_{\bar{t}}^{(n)}(r) - nrtD - nrR$; es existiert aber dann ein $\bar{r}_\epsilon > 0$, sodaß: $H_{\bar{t}}^{(n)}(\bar{r}_\epsilon) - n\bar{r}_\epsilon\bar{t}D - \bar{r}_\epsilon nR \leq \inf_{0 \leq r} H_{\bar{t}}^{(n)}(r) - nrtD - nrR + \frac{\epsilon}{2} \leq E_{(n)}(D, R) + \frac{\epsilon}{2}$; das heißt es ist $\bar{t} \notin B(\bar{r}_\epsilon, \epsilon)$ im Widerspruch zur Annahme, und es muß ein $\bar{r} > 0$ existieren mit: $B(\bar{r}, \epsilon) = \emptyset$. Es

gilt dann für alle $t \in A(\bar{r})$: $\inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR = H_t^{(n)}(\bar{r}) - n\bar{r}tD - \bar{r}nR < E_{(n)}(D, R) + \epsilon$ und für alle $t \in A(\bar{r})$:

$\inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR = \inf_{0 \leq r} H_t^{(n)}(r) - nrtD - nrR \leq E_{(n)}(D, R)$
(wegen der Konvexität von $r \mapsto H_t^{(n)}(r)$). Mit (2) folgt

hieraus ($\varepsilon > 0$ kann beliebig klein gewählt werden):

$\inf_{0 \leq r} \sup_{0 \leq t} \inf_{0 \leq R} H_t^{(n)}(r) - nrD - nrR \leq E_{(n)}(D, R)$ und damit die Behauptung, da die umgekehrte Ungleichung trivial ist.

4.8 Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und es bezeichne $\mathcal{F}_{ab}$ die Menge der linksstetigen, isotonen Funktionen von $]-\infty, a]$ nach $[0, b]$, so ist durch:

$$\rho: \mathcal{F}_{ab} \times \mathcal{F}_{ab} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (f_1, f_2) \longrightarrow \inf \{ \varepsilon > 0: \tilde{f}_1(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq \tilde{f}_2(x) \leq \tilde{f}_1(x + \varepsilon) + \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{wobei: } \tilde{f}_i(y) := \begin{cases} b & \text{falls } y > a \\ f_i(y) & \text{falls } y \leq a \end{cases} \quad (i=1,2; y \in \mathbb{R})$$

eine Metrik auf $\mathcal{F}_{ab}$ definiert, die Levi-Metrik genannt wird. (Die Metrikaxiome zeigt man mit elementaren Mitteln)

4.9 Satz

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Korollar 4.6 gibt es ein $\bar{n} \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq \bar{n}$, $D \in [\underline{D}, \underline{D}]$, und mit $a(n, D) := \frac{1}{n} R_{p(n)}^*(nD) - \delta$, $c(\frac{\delta}{2}, \underline{D}, \bar{D})$ wie in Lemma 4.4, die Funktionen:

$$f_D^n:]-\infty, a(n, D)] \longrightarrow \mathbb{R} \quad g_D^n:]-\infty, a(n, D)] \longrightarrow \mathbb{R} \\ R \longrightarrow -\frac{1}{n} E_{(n)}(D, R + \mathcal{O}_1(\frac{1}{\sqrt{n}})) \quad R \longrightarrow -\frac{1}{n} E_{(n)}(D, R - \mathcal{O}^1(\frac{1}{\sqrt{n}}))$$

Elemente von $\mathcal{F}_{a(n, D), c(\frac{\delta}{2}, \underline{D}, \bar{D})}$ sind, und weiter:

$$\rho(f_D^n, g_D^n) \leq \mathcal{O}_1(\frac{1}{\sqrt{n}}) + \mathcal{O}^1(\frac{1}{\sqrt{n}}) \quad \text{ist.}$$

Beweis:

Mit $\bar{n}$ wie in Korollar 4.6 definieren wir $\bar{n}$ als die kleinste natürliche Zahl größer oder gleich $\bar{n}$, so daß $\mathcal{O}_1(\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}) \leq \frac{\delta}{2}$. Sei dann $n \geq \bar{n}$ und $D \in [\bar{D}, \underline{D}]$, so ist aufgrund Definition 2.2 $R \in \mathbb{R} \longrightarrow -\frac{1}{n} E_{(n)}(D, R)$ eine isotonie nichtnegative Funktion; dies trifft dann auch für die Funktionen f_D^n und g_D^n zu. Hieraus folgt mit der Definition von $\bar{n}$ und Lemma 4.4, daß f_D^n und g_D^n durch $c(\frac{\delta}{2}, \underline{D}, \bar{D})$ nach oben beschränkt, und somit Elemente von $\mathcal{F}_{a(n,D),c(\frac{\delta}{2}, \underline{D}, \bar{D})}$ sind, falls ihre Linksstetigkeit gezeigt werden kann. Letztere sieht man aber sofort aus folgender Ungleichungskette, die für alle Folgen $(R_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen, mit: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} R_\nu = R_0 \in \mathbb{R}$, $\sup_{\nu \in \mathbb{N}} R_\nu \leq R_0$, und alle $\bar{r} > 0$ gilt: (man beachte Lemma 4.7)

$$E_{(n)}(D, R_0) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} E_{(n)}(D, R_\nu) \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} E_{(n)}(D, R_\nu) \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq R_\nu} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nr t D - nr R_\nu = \sup_{0 \leq t \leq R_0} \inf_{0 \leq r \leq \bar{r}} H_t^{(n)}(r) - nr t D - nr R_0$$

Den zweiten Teil der Behauptung erhalten wir mittels folgender Fälle, wobei $\epsilon_1 := \mathcal{O}_1(\frac{1}{\sqrt{n}})$ und $\epsilon^1 := \mathcal{O}^1(\frac{1}{\sqrt{n}})$:

1. Fall: Sei $R \in]-\infty, a(n, D) - \epsilon_1 - \epsilon^1]$, so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_D^n(R - \epsilon_1 - \epsilon^1) - \epsilon_1 - \epsilon^1 &= \tilde{f}_D^n(R - \epsilon_1 - \epsilon^1) - \epsilon_1 - \epsilon^1 \leq -\frac{1}{n} E_{(n)}(D, R - \epsilon^1) = g_D^n(R) = \\ \tilde{g}_D^n(R) &\leq -\frac{1}{n} E_{(n)}(D, R + 2\epsilon_1 + \epsilon^1) + \epsilon_1 + \epsilon^1 \quad (\text{Isotonie}) = \tilde{f}_D^n(R + \epsilon_1 + \epsilon^1) + \\ \epsilon_1 + \epsilon^1 &= \tilde{f}_D^n(R + \epsilon_1 + \epsilon^1) + \epsilon_1 + \epsilon^1 \end{aligned}$$

2. Fall: Sei $R \in]a(n, D) - \epsilon_1 - \epsilon^1, a(n, D)]$, so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_D^n(R - \epsilon_1 - \epsilon^1) - \epsilon_1 - \epsilon^1 &\leq \tilde{g}_D^n(R) \quad (\text{wie unter 1.}) = g_D^n(R) \leq \\ c(\frac{\delta}{2}, \underline{D}, \bar{D}) &\leq \tilde{f}_D^n(R + \epsilon_1 + \epsilon^1) + \epsilon_1 + \epsilon^1 \quad (\text{Definition von } f_D^n) \end{aligned}$$

3. Fall: Sei $R > a(n, D)$, so gilt:

$$\tilde{F}_D^n(R - \epsilon_1 - \epsilon^1) - \epsilon_1 - \epsilon^1 \leq c\left(\frac{\delta}{2}, \underline{D}, \bar{D}\right) = \tilde{g}_D^n(R) = \tilde{F}_D^n(R + \epsilon_1 + \epsilon^1)$$

Bemerkungen:

(i) Die Bedeutung der Levi-Metrik für unser Abschätzungsproblem läßt sich wie folgt aufzeigen: angenommen man mittelt bei fester Schwelle D die Raten R mit einem Lebesgue-stetigen Wahrscheinlichkeitsmaß μ , dessen Radon-Nikodym-Dichte einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante $s \in \mathbb{R}$ genügt, und dessen Träger in $\left[\bar{R}, \frac{1}{n} R_{p(n)}^*(nD) - \delta\right]$ (mit gewissem $\bar{R} > 0$, $\delta > 0$, und hinreichend großem $n \in \mathbb{N}$) liegt, so hängt die Differenz der Erwartungswerte der unteren und oberen Exponentenabschätzung von Korollar 4.6 wie $s(\mathcal{O}_1(\frac{1}{\sqrt{n}}) + \mathcal{O}_1^1(\frac{1}{\sqrt{n}}))$ von n ab.

(ii) Aus den Bemerkungen zu Definition 4.3 sieht man, daß für alle $0 < D < \frac{1}{n} D_{p(n)}^*(\max)$ ein $\bar{R} > 0$, $\delta > 0$ angegeben werden können, so daß $\left[\bar{R}, \frac{1}{n} R_{p(n)}^*(nD) - \delta\right]$ nicht leer ist, also Satz 4.5 und Korollar 4.6 angewendet werden können. Falls $D_{p(n)}^*(\max) = 0$, so gilt für jede positive Rate R und Schwelle D : $R > R_{p(n)}^*(nD) = 0$, und wir könnten die Ergebnisse dieses Paragraphen nicht benützen; der folgende letzte Paragraph wird die Theorie diesbezüglich abrunden.

§ 5 Spezielle obere Abschätzung für "hohe" Raten

Für Raten, die größer oder gleich $\frac{1}{n} R_{P(n)}^*(nD)$ sind, wird die untere Abschätzung von $P_{(n)}(D, R)$ gleich Null (Korollar 2.3), während die günstigste obere Abschätzung, die man aus Satz 3.6 erhielte, wie $\exp(-e^{\sqrt{n}})$ von n abhängt. Ein Ergebnis wie in Paragraph 4, daß sich nämlich die Exponenten der unteren und oberen Abschätzung in der Levi-Metrik annähern, ist somit nicht zu erwarten; jedoch werden wir in diesem Paragraphen eine gegenüber Satz 3.6 verbesserte obere Abschätzung erhalten, die vermuten läßt, daß für diesen Ratenbereich die Rolle von $\frac{1}{n} \ln(P_{(n)}(D, R))$ durch $\frac{1}{n} \ln \ln(P_{(n)}(D, R))$ übernommen werden könnte. Zur Herleitung dieser oberen Abschätzung gehen wir wie in Paragraph 3 vor, indem wir wieder an zentraler Stelle ein leicht abgeändertes Lemma 3.1 verwenden werden, dessen Voraussetzungen durch speziell konstruierte Abbildungen $t \geq 0 \longrightarrow \lambda_{t, \nu} \in \Delta(\mathbb{K})$ ($1 \leq \nu \leq n$) erfüllt werden.

3.1 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p_Y, \mathcal{X})_{Y \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle,
 $D > 0, R > 0, n \in \mathbb{N}$ derart, daß $1 - e^{-nR} \geq e^{-1}$ und
 $D - 4\sqrt{\frac{2}{n}} \|\mathcal{X}\| > 0$; sei weiter $\bar{\Omega} \in \mathcal{B}_{(n)}$, und $(\lambda_Y)_{1 \leq Y \leq n}$
 ein n -Tupel endlicher Wahrscheinlichkeitsmaße auf
 $\mathcal{X}$. Falls für alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$ ein $t(\omega_{(n)}) > 0$ existiert, mit:
 (i) $|t(\omega_{(n)}) - t(\omega'_{(n)})| \leq n^{-2}$ für alle $\omega_{(n)}, \omega'_{(n)} \in \bar{\Omega}$
 (ii) $nD - \sqrt{8n} \|\mathcal{X}\| \leq \sum_{Y=1}^n \sum_{l \in \mathcal{X}} P_{\lambda_Y}^{t(\omega_{(n)})}(\omega_Y(l)) l(\omega_Y) + \sqrt{2n} \|\mathcal{X}\| \leq nD$
 für alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$

so existiert ein Quellencode $L_{(n)}$, mit:

$$\ln(|L_{(n)}|) \leq nR, \text{ und } p_{(n)}\{\omega_{(n)}: \bigwedge_{l_{(n)} \in L_{(n)}} l_{(n)}(\omega_{(n)}) > nD\} \cap \bar{\Omega} \leq \int_{\bar{\Omega}} dp_{(n)} \exp(-\exp(nR - \sum_{Y=1}^n \ln(h_{\lambda_Y}^{\bar{t}})) + \bar{t}(nD - 4\sqrt{2n} \|\mathcal{X}\|) - \frac{\|\mathcal{X}\|}{n} - 1 - \ln(2)))$$

wobei: $\bar{t} := \inf_{\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}} t(\omega_{(n)})$

Beweis:

Mit den Bezeichnungen des Beweises von Lemma 3.1
 ergibt sich vollkommen analog zu (1) und (2) jenes Be-
 weises:

$$\bar{m}(D) \leq \int_{\bar{\Omega}} p_{(n)}(\omega_{(n)}) \exp(-\lambda_{(n)}\{l_{(n)}: l_{(n)}(\omega_{(n)}) \leq nD\}) \quad (1')$$

$$\lambda_{(n)}\{l_{(n)}: l_{(n)}(\omega_{(n)}) \leq nD\} \geq \frac{1}{2} \exp(-\sum_{Y=1}^n \ln(h_{\lambda_Y}^{\bar{t}}(\omega_Y)) + \bar{t}(nD - 4\sqrt{2n} \|\mathcal{X}\|) - \frac{\|\mathcal{X}\|}{n})$$

für alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega} \quad (2')$

Wegen $\frac{\ln(N)}{n} \geq \frac{1}{n} \ln(e^{nR} - 1) \geq nR - 1$ (Nebenbedingung
 für n) folgt mit der Definition von $\bar{m}(D)$ (Mittelwert
 der D -Schwellenwertverluste einer Menge von Quellencod-
 es, deren Rate kleiner gleich R ist) die Behauptung.

5.2 Lemma

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathcal{L})_{v \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, die (Bed 2) erfüllt, $\bar{D} > 0$, $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$, und $K_{\bar{D}}, T_{\bar{D}}$ wie in Lemma 3.4 (ii) definiert, so gibt es Abbildungen $t \geq 0 \rightarrow \lambda_{t,v} \in \Delta(\mathcal{L})$ ($1 \leq v \leq n$) und eine meßbare Teilmenge $\bar{\Omega}$ von $\Omega_{(n)}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $p_{(n)}\{\bar{\Omega}\} \geq 1 - \exp(-e^{nR})$
- (ii) $\|\lambda_{t,v} - \lambda_{t',v}\| := \sup_{1 \in \mathcal{L}} |\lambda_{t,v}(1) - \lambda_{t',v}(1)| \leq \frac{2}{n}$, falls $|t - t'| \leq \frac{1}{n^2}$
- (iii) $\sum_{v=1}^n \sum_{1 \in \mathcal{L}} p_{t,v}^{1, \omega_v}(1) 1(\omega_v) \leq nt \frac{\bar{D}}{4}$, für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$ und alle $t \geq T_{\bar{D}} + 1$
- (iv) $\sum_{v=1}^n \ln(h_{\lambda_{t,v}}^t(\omega_v)) \leq \max \left\{ \sum_{v=1}^n \inf_{n \in \mathcal{X}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p_v)} \int d\bar{p} \ln(n^{-1}); \frac{nt\bar{D}}{4} \right\} + 1 + 2$ für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$ und alle $t \geq 0$.

Beweis:

Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $1 \leq v \leq n$ seien mit $t_k := \frac{k}{n}$ $h_{k,v} \in \mathcal{X}(t_k)$ und $\bar{\lambda}_{k,v} \in \Delta(\mathcal{L})$ derart gewählt, daß:

$$\sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p_v)} \int d\bar{p} \ln(h_{k,v}^{-1}) \leq \inf_{h \in \mathcal{X}(t_k)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p_v)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) + \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$p_v\{\omega: |\ln(h_{k,v}^t(\omega)) - \ln(h_{k,v}(\omega)^{-1})| \geq \frac{1}{n}\} \leq \frac{1}{nK_n} \exp(-e^{nR}) \quad (2)$$

wobei K_n die kleinste natürliche Zahl, mit $t_{K_n} \geq T_{\bar{D}}$ ist. (solche $\bar{\lambda}_{k,v}$ existieren wegen der Beschränktheit der Verlustfunktionen und der Definition der $\mathcal{X}(t)$)

Mit $\Omega_k := \{\omega_{(n)}: |\sum_{v=1}^n (\ln(h_{k,v}^t(\omega_v)) - \ln(h_{k,v}(\omega_v)^{-1}))| \geq 1\}$ folgt aus (2): $p_{(n)}\{\Omega_k\} \leq \frac{1}{K_n} \exp(-e^{nR})$ und wir erhalten für: $\bar{\Omega} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ die Behauptung (i).

Gemäß (Bed 2) gibt es nun eine Folge $(\tilde{\mathcal{X}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlicher Teilmengen von $\mathcal{X}$, derart, daß:

$$\sup_{y \in \tilde{\mathcal{X}}_n} |\tilde{\mathcal{X}}_n| \leq K_{\tilde{\mathcal{D}}} \quad \text{und} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \in \mathcal{M}(p_n)} \int d\tilde{p} \bigwedge_{l \in \tilde{\mathcal{X}}_n} 1 \leq \frac{\tilde{\mathcal{D}}}{8} \quad (3)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei dann $\tilde{\lambda}_n \in \Delta(\mathcal{X})$ definiert durch:

$\tilde{\lambda}_n(1) := \frac{1}{|\tilde{\mathcal{X}}_n|}$, falls $l \in \tilde{\mathcal{X}}_n$, und $\lambda_n(1) := 0$, falls $l \notin \tilde{\mathcal{X}}_n$. Wir setzen weiter für $\tilde{t} \geq -\frac{1}{2n}$ und $1 \leq n \leq n$:

$$\tilde{\lambda}_{t,n} := \begin{cases} \tilde{\lambda}_{t,n} & \text{falls } t \in [t_k - \frac{1}{2n}, t_k + \frac{1}{2n}[\text{ und } k \in K_n \\ \tilde{\lambda}_n & \text{falls } t \in [t_k - \frac{1}{2n}, t_k + \frac{1}{2n}[\text{ und } k > K_n \end{cases} \quad (4)$$

und es folgt leicht, daß für alle $t \geq 0$, $1 \leq n \leq n$ durch

$$l \in \mathcal{X} \longrightarrow \lambda_{t,n}(1) := n \int_{t - \frac{1}{2n}}^{t + \frac{1}{2n}} d\tilde{t} \tilde{\lambda}_{t,n}(1) \quad (5)$$

ein endliches Wahrscheinlichkeitsmaß $\lambda_{t,n}$ auf $\mathcal{X}$ definiert ist. Im Folgenden zeigen wir nun, daß die Abbildungen $t \geq 0 \longrightarrow \lambda_{t,n}$ ($1 \leq n \leq n$) die Behauptungen erfüllen.

Seien $t, t' \geq 0$ mit $0 \leq t - t' \leq n^{-2}$, so gilt für alle $l \in \mathcal{X}$

$$|\lambda_{t,n}(1) - \lambda_{t',n}(1)| = n \left| \int_{t - \frac{1}{2n}}^{t + \frac{1}{2n}} d\tilde{t} \tilde{\lambda}_{t,n}(1) - \int_{t' - \frac{1}{2n}}^{t' + \frac{1}{2n}} d\tilde{t} \tilde{\lambda}_{t,n}(1) \right| \leq \frac{2}{n}$$

und somit die Behauptung (ii).

Für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$ und alle $t \geq T_{\tilde{\mathcal{D}}} - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \ln(h_{\tilde{\lambda}_\nu}^t(\omega_\nu)) &= \sum_{\nu=1}^n -\ln\left(\sum_{l \in \tilde{\mathcal{X}}_\nu} \frac{1}{|\tilde{\mathcal{X}}_\nu|} e^{-t l(\omega_\nu)}\right) \leq \sum_{\nu=1}^n -\ln\left(\bigvee_{l \in \tilde{\mathcal{X}}_\nu} e^{-t l(\omega_\nu)}\right) \\ &+ n \ln(K_{\tilde{\mathcal{D}}}) \leq n t \left(\frac{\tilde{\mathcal{D}}}{8} + \frac{\ln(K_{\tilde{\mathcal{D}}})}{T_{\tilde{\mathcal{D}}} - 1}\right) = n t \frac{\tilde{\mathcal{D}}}{4} \quad (\text{wegen (3)}) \end{aligned} \quad (6)$$

Für $1 \leq n \leq n$ folgt aus (4) und (5), daß

$$\tilde{\lambda}_{t,n} = \tilde{\lambda}_n \text{ falls } t \geq T_{\tilde{\mathcal{D}}} + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_{t,n} = \lambda_n \text{ falls } t \geq T_{\tilde{\mathcal{D}}} + 1. \quad (7)$$

Aus (6) und (7) erhalten wir dann für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in \Omega_{(n)}$ und alle $t \geq T_{\tilde{\mathcal{D}}} + 1$:

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathbb{X}} \mathbb{P}_{\lambda_{t,\nu}}^{t, \omega_\nu(1)} l(\omega_\nu) = \frac{1}{t} \left(\sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathbb{X}} \mathbb{P}_{\lambda_\nu}^{t, \omega_\nu(1)} l(\omega_\nu) \ln(e^{t l(\omega_\nu)}) \right) \leq$$

$$\frac{1}{t} \left(\sum_{\nu=1}^n \ln \left(\sum_{l \in \mathbb{X}} \mathbb{P}_{\lambda_\nu}^{t, \omega_\nu(1)} e^{t l(\omega_\nu)} \right) \right) = \frac{1}{t} \sum_{\nu=1}^n \ln(n \mathbb{P}_{\lambda_\nu}^t(\omega_\nu)) \leq n \frac{\overline{D}}{4}$$

und somit die Behauptung (iii).

Es bleibt also noch Behauptung (iv) zu zeigen;
hierzu sei $t > 0$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ derart, daß $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

1. Fall: $k+1 \leq K_n$

Aus (4) und (5) folgt dann leicht, daß ein $\alpha \in [0, 1]$

existiert, mit: $\lambda_{t,\nu} = \alpha \bar{\lambda}_{k,\nu} + (1-\alpha) \bar{\lambda}_{k+1,\nu}$ für alle $1 \leq \nu \leq n$,

und wir erhalten für alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$:

$$\sum_{\nu=1}^n \ln(h_{\lambda_{t,\nu}}^t(\omega_\nu)) = \sum_{\nu=1}^n -\ln \left(\sum_{l \in \mathbb{X}} \lambda_{t,\nu}(l) e^{-t l(\omega_\nu)} \right) \leq$$

$$\sum_{\nu=1}^n \left(-\alpha \ln \left(\sum_{l \in \mathbb{X}} \bar{\lambda}_{k,\nu}(l) e^{-t l(\omega_\nu)} \right) - (1-\alpha) \ln \left(\sum_{l \in \mathbb{X}} \bar{\lambda}_{k+1,\nu}(l) e^{-t l(\omega_\nu)} \right) \right)$$

(Jensen-Ungleichung für $x > 0 \rightarrow \ln(x)$) $\leq$

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\alpha \ln(h_{\bar{\lambda}_{k,\nu}}^t(\omega_\nu)) + (1-\alpha) \ln(h_{\bar{\lambda}_{k+1,\nu}}^t(\omega_\nu)) + \alpha \|k\| \right)$$

(Beschränktheit der Verlustfunktionen und $t - t_k \leq \frac{1}{n}$) $\leq$

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\alpha \inf_{h \in \mathcal{H}(t_k)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p_\nu)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) + \right.$$

$$\left. (1-\alpha) \inf_{h \in \mathcal{H}(t_{k+1})} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p_\nu)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) \right)$$

+ $\alpha \|k\| + 2$ (wegen (1) und der Definition von $\bar{D}$) $\leq$

$$\sum_{\nu=1}^n \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(p_\nu)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) + \|k\| + 2$$

(wegen Lemma 1.7, 1.8, und 3.3 (ii))

2. Fall: $k = K_n$

Wie unter 1. gibt es ein $\alpha \in [0, 1]$ derart, daß für alle

$1 \leq \nu \leq n$ gilt: $\lambda_{t,\nu} = \alpha \bar{\lambda}_{k,\nu} + (1-\alpha) \bar{\lambda}_\nu$, und wir erhalten mit analogen Zwischenschritten zum 1. Fall für $p_{(n)}$ -fast alle

$\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \ln(h_{\lambda_{t,\nu}}^t(\omega_\nu)) &\leq \sum_{\nu=1}^n (\alpha \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{K}(p_\nu)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) + \\ & (1-\alpha) \ln(h_{\bar{\lambda}_\nu}^t(\omega_\nu))) + \alpha(|\mathcal{H}|+2) \leq \\ \max \left\{ \sum_{\nu=1}^n \inf_{h \in \mathcal{H}(t)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{K}(p_\nu)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) ; nt \frac{\bar{D}}{4} \right\} + \alpha(|\mathcal{H}|+2) \\ & \text{(wegen (6))} \end{aligned}$$

3. Fall: $k > K_n$

Aus (7) folgt dann $\lambda_{t,\nu} = \bar{\lambda}_\nu$ für alle $1 \leq \nu \leq n$ und wir erhalten mit (6) für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$:

$$\sum_{\nu=1}^n \ln(h_{\lambda_{t,\nu}}^t(\omega_\nu)) \leq nt \frac{\bar{D}}{4}$$

Das Ergebnis der drei Fälle ergibt die Behauptung (iv)

5.3 Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, p_\nu, \mathcal{L})_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine gedächtnisfreie Quelle, die der Bedingung (Bed 2) genügt, und seien $\bar{D} > 0$, $\bar{R} > 0$, so gibt es ein $n(\bar{D}, \bar{R}) \in \mathbb{N}$, derart, daß für alle $D \geq \bar{D}$, $R \geq \bar{R}$, $n \geq n(\bar{D}, \bar{R})$ gilt:

$$P_{(n)}(D, R) \leq 2 \exp(-\exp(n(R - \frac{1}{n} R_{p_{(n)}}^*(nD) - \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}))))$$

wobei mit $T_{\bar{D}}$ wie in Lemma 3.4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}) &= 4\sqrt{\frac{2}{n}}(|\mathcal{H}|(T_{\bar{D}}+1) + \frac{1}{n}(\ln(n^2(T_{\bar{D}}+1)+1) + \\ & 3+\ln(4))) + \frac{|\mathcal{H}|}{n^2} \end{aligned}$$

Beweis:

Sei mit $\bar{R}_n := \bar{R} - \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} \ln(n^2(T_{\bar{D}}+1)+1)$ $n(\bar{D}, \bar{R})$ die kleinste natürliche Zahl, so daß für alle $n \geq n(\bar{D}, \bar{R})$:

$$2\sqrt{2n}|\mathcal{H}| \leq n \frac{\bar{D}}{4} \quad (1), \quad 0 < \bar{R}_n \quad (2), \quad 1 - \exp(-n\bar{R}_n) \geq \frac{1}{e} \quad (3)$$

$$8 \exp(n(T_D + 1)) \leq \sqrt{2n} \|x\| \quad (4) \text{ und } \frac{1}{2}(1 - e^{-3}) \geq e^{-nR} \quad (5)$$

Es sei nun $n \gg n(\bar{D}, \bar{R})$, so gibt es zu $n, \bar{D}$ und R gemäß Lemma 5.2 ein $\bar{\Omega} \in \mathcal{B}_n$ und für jedes $1 \leq \nu \leq n$ eine Abbildung $t \geq 0 \rightarrow \lambda_{t,\nu} \in \Delta(\mathcal{X})$, so daß Eigenschaften (i) bis (iv) dieses Lemmas erfüllt sind. Analog zum Beweis von Satz 3.6 gliedern wir diesen Beweis in vier Teile.

1. Teil: Zerlegung von $\bar{\Omega}$

Sei $\Omega^0 := \{\omega_{(n)} \in \bar{\Omega} : \sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda_{0,\nu}(l) l(\omega_{\nu}) + \sqrt{2n} \|x\| \leq nD\}$, so existiert für $p_{(n)}$ -fast alle $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega} \cap \{\Omega^0$ ein $t(\omega_{(n)}) \in [0, T_D + 1]$

$$\text{mit: } \sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{P_{t(\omega_{(n)})}^{\omega_{\nu}}(l)}{\lambda_{t(\omega_{(n)})}^{\omega_{\nu}}(l)} l(\omega_{\nu}) = nD - 2\sqrt{2n} \|x\| \quad (6)$$

denn für jedes $\omega_{(n)} \in \bar{\Omega}$ ist wegen Lemma 5.2 (ii) und wegen $P_{t,\nu}^{\omega_{\nu}}(1) = \lambda_{t,\nu}(1) e^{-t l(\omega_{\nu})} (\sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda_{t,\nu}(l) e^{-t l(\omega_{\nu})})^{-1}$ die Funktion $t \geq 0 \rightarrow \sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{P_{t,\nu}^{\omega_{\nu}}(l)}{\lambda_{t,\nu}^{\omega_{\nu}}(l)} l(\omega_{\nu})$ stetig, und da für jedes

$$\omega_{(n)} \in \bar{\Omega} \cap \{\Omega^0 \text{ wegen (1) gilt: } \sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{P_{0,\nu}^{\omega_{\nu}}(l)}{\lambda_{0,\nu}^{\omega_{\nu}}(l)} l(\omega_{\nu}) =$$

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{l \in \mathcal{L}} \lambda_{0,\nu}(l) l(\omega_{\nu}) > nD - 2\sqrt{2n} \|x\| > n \frac{\bar{D}}{4}, \text{ folgt mit Lemma}$$

5.2 (iii) die Aussage (6) aus dem Zwischenwertsatz für

stetige Funktionen. Es sei nun $I(n) \in \mathbb{N}$ definiert durch:

$$n^2(T_D + 1) \leq I(n) < n^2(T_D + 1) + 1 \quad (7)$$

so setzen wir für jedes $1 \leq i \leq I(n)$:

$$\Omega^i := \{\omega_{(n)} \in \bar{\Omega} \cap \{\Omega^0 : t(\omega_{(n)}) \in [(i-1)n^{-2}, in^{-2} [\}$$

2. Teil: "Guter" Quellencode für Ω^0

Vollkommen analog zum Teil 2 des Beweises von

Satz 3.6 zeigt man die Existenz eines Quellencodes $I_{(n)}^0$

mit: $\ln(|I_{(n)}^0|) \leq nR - \ln(2)$, und:

$$P_{(n)}\{\omega_{(n)} \in \Omega^0: \bigwedge_{l_{(n)} \in L_{(n)}^0} l_{(n)}(\omega_{(n)}) > nD\} \leq P_{(n)}\{\Omega^0\} \exp(-\frac{1}{4} e^{nR} + \frac{1}{2}) \leq$$

$$P_{(n)}\{\Omega^0\} \exp(-\exp(nR - 3 - \ln(4))) \quad (\text{wegen (5)}) \quad (8)$$

3. Teil: "Gute Quellencodes für Ω^1

Es sei $1 \leq i \leq I(n)$, so gilt mit $t_1 := \frac{i-1}{n^2}$ wegen (6), Lemma 3.5 mit Lemma 5.2 (ii) und (4) für alle $\omega_{(n)} \in \Omega^1$:

$$nD - 2\sqrt{2n} \|x\| \leq \sum_{v=1}^n \sum_{l_{(n)} \in L_{(n)}^1} P_{\lambda_{t_1, v}}^{t_1(\omega_{(n)})} l_{(n)}(\omega_{(n)}) + \sqrt{2n} \|x\| \leq nD \quad (9)$$

Es erfüllen nun D , $R - \frac{1}{n} \ln(2) - \frac{1}{n} \ln(n^2(T_D + 1) + 1)$, Ω^1 , $(\lambda_{t_1, v})_{1 \leq v \leq n}$ und n wegen (1), (2), (3) und (9) in Verbindung mit der Definition von Ω^1 die Voraussetzungen des Lemma 5.1, und wir erhalten somit die Existenz eines Quellencodes $I_{(n)}^1$ mit:

$$\ln(|I_{(n)}^1|) \leq nR - \ln(2) - \ln(n^2(T_D + 1) + 1) \quad \text{und}$$

$$P_{(n)}\{\omega_{(n)} \in \Omega^1: \bigwedge_{l_{(n)} \in I_{(n)}^1} l_{(n)}(\omega_{(n)}) > nD\} \leq$$

$$\int dP_{(n)} \exp(-\exp(nR - \sum_{v=1}^n \ln(h_{\lambda_{t_1, v}}^{t_1})) + t_1(nD - 4\sqrt{2n} \|x\| - 1 - \ln(4) - \frac{\|x\|}{n} - \ln(n^2(T_D + 1) + 1))) \leq$$

$$P_{(n)}\{\Omega^1\} \exp(-\exp(nR - \max\{\sum_{v=1}^n \inf_{h \in \mathcal{H}(t_1)} \sup_{\bar{p} \in \mathcal{M}(P_v)} \int d\bar{p} \ln(h^{-1}) - nt_1 D; nt_1(\frac{D}{4} - D)\} - nO(\frac{1}{\sqrt{n}})))$$

$$(\text{wegen Lemma 5.2 (iv)}, t_1 \leq \frac{I(n)-1}{n^2} < T_D + 1) \leq$$

$$P_{(n)}\{\Omega^1\} \exp(-\exp(nR - R_{P_{(n)}}^*(nD) - nO(\frac{1}{\sqrt{n}}))) \quad (\text{wegen } D \geq \bar{D}, \text{ Definition 4.3, und } R_{P_{(n)}}^*(nD) \geq 0)$$

4. Teil: "Guter" Quellencode für $\Omega_{(n)}$

Sei $I_{(n)} := \bigcup_{i=0}^I I_{(n)}^i$, so folgt aus (8) und Teil 3:

$$|I_{(n)}| \leq \frac{1}{2} e^{nR} + I_{(n)} \frac{1}{2} e^{nR - \ln(n^2(T_D + 1) + 1)} \leq e^{nR} \quad (10)$$

und:

$$P_{(n)} \left\{ \bigwedge_{l_{(n)} \in I_{(n)}} l_{(n)} > nD \right\} = \sum_{i=0}^{I_{(n)}} P_{(n)} \left\{ \Omega^i \cap \left\{ \bigwedge_{l_{(n)} \in I_{(n)}^i} l_{(n)} > nD \right\} \right\} + P_{(n)} \{ \bar{\Omega} \}$$

(wegen (6), (7) und der Definition der Ω^i) $\leq$

$$\exp(-\exp(nR)) + P_{(n)} \{ \Omega^0 \} \exp(-\exp(nR - 3 - \ln(4))) +$$

$$P_{(n)} \{ \bar{\Omega} \cap \Omega^0 \} \cdot \exp(-\exp(nR - R_{P_{(n)}}^*(nD) - n \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})))$$

$$(\text{Lemma 5.2 (i)}) \quad (11)$$

Aus (10) und (11) erhalten wir dann wegen

$0 < 3 + \ln(4) \leq \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ die Behauptung.

Literaturverzeichnis

- [1] Berger, P.
Rate Distortion Theory: A Mathematical Basis
for Data Compression,
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [2] Dunford, N. / Schwartz, J.T.
Linear Operators Part I,
Interscience Publishers Inc., 1958
- [3] Gallager, R.G.
Information Theory and Reliable Communication,
Wiley, New York, 1968
- [4] Kambo, N.S. / Singh, S.
Error Bound for Source Coding with a Fidelity
Criterion,
erscheint in IEEE Trans. Inform. Theory.
- [5] Kempermann, J.H.B.
On the Optimum Rate of Transmitting Information
Springer Lecture Note 89, 1969.
- [6] König, H.
Über das von Neumannsche Minimax Theorem,
Archiv der Mathematik, 19, 1968, S. 482-487.
- [7] Marton, K.
Error Exponent for Source Coding with a
Fidelity Criterion,
IEEE Trans. Inform. Theory, IT-20, 1974,
S. 197-199.
- [8] Omura, J.K.
A Lower Bounding Method for Channel and Source
Coding Probabilities,
Information and Control 27, 1975, S. 148-177.

Verzeichnis der wichtigsten Symbole:

$(\text{Bed } 1)$	S. 24	$D_{t,r}$	S. 42
$(\text{Bed } 2)$	S. 64	$F_{\lambda}^{\omega}(1)$	S. 25
$(\text{Bed } 3)$	S. 77	$P_{(n)}(\omega, \mathbb{R})$	S. 42
$\mathcal{P}_{(n)}(L)$	S. 9	$R_p(L, \mathbb{Z})$	S. 10
$E_{(n)}(L, R)$	S. 60	$R_p(\mathbb{Z})$	S. 10
$h_{\lambda}^t(\omega)$	S. 10	$R_{p(n)}^*(nD)$	S. 70
$\mathcal{X}(t)$	S. 43	$\mathbb{Z}_{\overline{D}}$	S. 66
$H_t(r)$	S. 44		
$h_{t,r}$	S. 46		
$n_{t,r}^v, H_t^v(r)$	S. 55		
$n_{t,r}^{(n)}, H_t^{(n)}(r)$	S. 55		
$K_{\overline{D}}$	S. 66		
$\Delta(\mathbb{Z})$	S. 10		
$\mathcal{M}(p)$	S. 50		
$(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathbb{Z})$	S. 4		
$(\Omega, \mathcal{B}, p, \mathbb{Z})_{v \in \mathbb{N}}$	S. 5		

Lebenslauf

Geboren am 24.7.1949 in Eschenbach, Oberpfalz.

In Regensburg Besuch der Volksschule Am Hohen Kreuz von 1955 bis 1960 und des Goethe-Gymnasiums von 1960 bis 1969. Abschluß der Schulzeit mit dem Abitur im Sommer 1969.

Anschließend Beginn des Studiums der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg.

Nach dem Vordiplom im Sommersemester 1971 ein Auslandssemester an der Universität von Exeter, England.

Seit dem Sommersemester 1972 wieder an der Universität Erlangen-Nürnberg immatrikuliert. Diplomprüfungen im Sommersemester 1974 nach Anfertigung einer Diplomarbeit aus dem Gebiet der Informationstheorie bestanden.

Von November 1974 bis Oktober 1976 Stipendiat der Graduiertenförderung zur Erstellung einer Dissertation.

Copy - Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131 - 26197